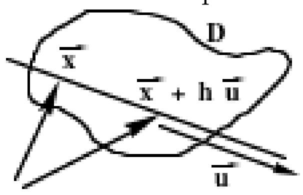
CAPÍTULO III. CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

SECCIONES

1. Derivadas parciales. Derivadas direccionales.
2. Diferenciabilidad.
3. Plano tangente.
4. Derivación de funciones compuestas.
5. Derivadas de orden superior.
6. Fórmula de Taylor.

1. DERIVADAS PARCIALES. DERIVADAS DIRECCIONALES

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. La noción de derivada está relacionada con la variación $f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{x})$, para valores de $\overrightarrow{u}$ arbitrariamente pequeños, donde ahora $\overrightarrow{u}$ indica la dirección en la que se mueve el punto $\overrightarrow{x}$.



Observemos que, a diferencia de las funciones de una variable, ahora no tiene sentido la expresión $\dfrac{f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{x})}{\overrightarrow{u}}$, pues el denominador es un vector. Debemos pues modificar adecuadamente la definición de derivada.

Definición. Si $\overrightarrow{x} \in \operatorname{int} D$ y $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^m$ es un vector unitario arbitrario, sea $h \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño para que el segmento $[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{x} + h\overrightarrow{u}]$ esté contenido en D. Llamamos <u>derivada direccional</u> de f en el punto $\overrightarrow{x}$ según la dirección del vector $\overrightarrow{u}$ a

$$f'(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{x} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{x})}{h}.$$

[El cociente $\dfrac{f(\overrightarrow{x} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{x})}{h}$ representa el promedio de variación de f por unidad de distancia según la dirección del vector $\overrightarrow{u}$.]

Observemos que, si $m = 1$, sólo hay dos vectores unitarios, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, que son las dos únicas direcciones posibles en $\mathbb{R}$. Si $m = 2$, todas las direcciones (o vectores unitarios) pueden escribirse como $(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$, para cada $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

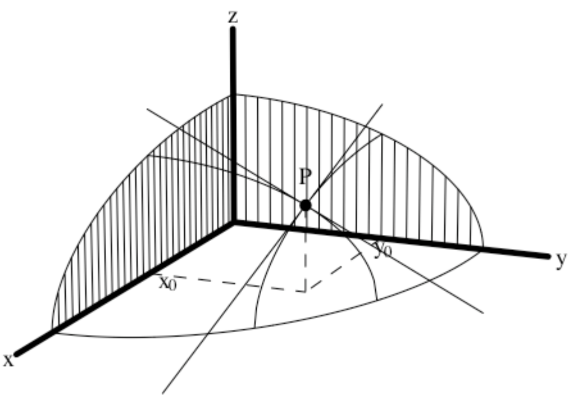
Otras notaciones usuales para la derivada direccional son

$$f'(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) = D_{\vec{u}} f(\overrightarrow{x}) = f'_{\vec{u}}(\overrightarrow{x}).$$

En el caso particular de que $\overrightarrow{u_k} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ sea el k-ésimo vector unitario coordenado, $f'(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u_k})$ recibe el nombre de <u>*derivada parcial k-ésima*</u> de f en $\overrightarrow{x}$, o <u>*derivada parcial respecto a la k-ésima coordenada* x_k</u>, y la notación que utilizaremos es

$$D_k f(\overrightarrow{x}) = f'_k(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k} f(\overrightarrow{x}),\ 1 \le k \le m.$$

En este caso, la definición equivale a la definición de derivada de una función de una variable, pues basta suponer constantes el resto de las mismas.



Para los casos más comunes de funciones de dos o tres variables $u = f(x, y, z)$ utilizaremos la notación más difundida

$$D_x f = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad D_y f = f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad D_z f = f'_z = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Enunciamos algunas propiedades que se deducen de las definiciones anteriores.

(1) *Si* $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u}$, *entonces* $f'(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}) = -f'(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u})$.

A lo largo de direcciones opuestas, las derivadas direccionales toman valores opuestos.

(2) *Si descomponemos la función en sus componentes* $f = (f_1, \dots, f_n)$, *entonces*

$$\exists f'(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) \iff \exists f'_j(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}), \ \forall j = 1, \dots, n.$$

En este caso,

$$f'(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) = \big(f'_1(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}), \dots, f'_n(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u})\big).$$

En particular, las derivadas parciales se obtienen como

$$D_k f(\overrightarrow{x}) = \big(D_k f_1(\overrightarrow{x}), \dots, D_k f_n(\overrightarrow{x})\big), \ 1 \le k \le m.$$

(3) *Si* $F(t) = f(\overrightarrow{x} + t\overrightarrow{u})$, *entonces* $F'(0) = f'(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u})$.

En general, $F'(t) = f'(\overrightarrow{x} + t\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$.

(4) *Si* $f(\overrightarrow{x}) = a\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}$, $f'(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) = a\overrightarrow{u}$, $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}$.
(De este modo se extiende la fórmula de la derivada de $f(x) = ax + b$.)

(5) *Si* $f(\overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{x}\|^2$, *entonces* $f'(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u}$.
(Esta fórmula generaliza la fórmula de la derivada de $f(x) = x^2$.)

En algunos de los problemas que siguen mostramos ciertos hechos relevantes, como por ejemplo:

◇ Puede haber funciones para las que existen ambas derivadas parciales pero no existe ninguna otra derivada direccional (problema 3.5).

◇ La existencia de derivadas direccionales en cualquier dirección no es condición suficiente para la continuidad de una función (problema 3.7).

PROBLEMA 3.1

Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = x \operatorname{arc\,sen}(x - y)$.

(b) $f(t, u) = \dfrac{\cos 2tu}{t^2 + u^2}$.

(c) $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.

(d) $f(x, y) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2} dt \ (x > 0, y > 0)$.

Solución

Para calcular las derivadas parciales de una función, basta aplicar las reglas usuales de derivación de funciones de una variable, manteniendo constantes el resto de las variables.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{arc\,sen}(x - y) + \dfrac{x}{\sqrt{1 - (x - y)^2}}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{\sqrt{1 - (x - y)^2}}.$$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{-2u(t^2 + u^2) \operatorname{sen} 2tu - 2t \cos 2tu}{(t^2 + u^2)^2}$,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{-2t(t^2 + u^2) \operatorname{sen} 2tu - 2u \cos 2tu}{(t^2 + u^2)^2}.$$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{yz(-x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xz(x^2 - y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy(x^2 + y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

(d) Recordando el teorema fundamental del cálculo integral,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-xy} \cdot \frac{y}{2\sqrt{xy}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-xy} \cdot \frac{x}{2\sqrt{xy}}.$$

PROBLEMA 3.2

Siendo $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2y + \operatorname{arc\,tg}(x^2y)}$, *comprobar que se verifica la igualdad* $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Solución

Para abreviar los cálculos, llamamos $z = f(x,y)$ y $t = x^2y + \operatorname{arc\,tg}(x^2y)$. De este modo, $z = \ln\sqrt{t} = (1/2)\ln t$ y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2t}\left[2xy + \frac{2xy}{1+x^4y^2}\right] = \frac{xy}{t}\left[1 + \frac{1}{1+x^4y^2}\right];\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{2t}\left[x^2 + \frac{x^2}{1+x^4y^2}\right] = \frac{x^2}{2t}\left[1 + \frac{1}{1+x^4y^2}\right].
\end{aligned}$$

Multiplicando por x la primera igualdad y por $-2y$ la segunda, se obtiene inmediatamente la igualdad propuesta.

PROBLEMA 3.3

Encontrar una función $z = f(x,y)$ *que verifique la identidad* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Solución

Integrando respecto a x, resulta:

$$f(x,y) = \int \frac{\partial z}{\partial x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + g(y),$$

donde ahora la constante de integración es una función que depende de y (cualquiera de ellas tiene derivada parcial nula respecto a x).

PROBLEMA 3.4

Hallar una función $u = f(x,y,z)$ *tal que* $(f'_x, f'_y, f'_z) = F$, *donde*

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = yz(2x+y+z)\,\overrightarrow{i} + xz(x+2y+z)\,\overrightarrow{j} + xy(x+y+2z)\,\overrightarrow{k}.$$

Solución

Por hipótesis,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= yz(2x+y+z), && (1)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xz(x+2y+z), && (2)\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= xy(x+y+2z). && (3) \end{aligned}$$

Integrando respecto a x la primera igualdad, resulta:

$$f(x,y,z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2 + g(y,z). \qquad (4)$$

Derivamos este resultado respecto a y y lo igualamos con (2):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z + 2xyz + xz^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = xz(x+2y+z).$$

Esto implica que $D_y g = 0$; por tanto, g sólo depende de z, $g(y,z) = h(z)$. Sustituyendo esta expresión en (4) y derivando con respecto a z, obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y + xy^2 + 2xyz + h'(z).$$

Al igualar este resultado con (3), se deduce que $h'(z) = 0$, o bien $h(z) = C$. En definitiva:

$$f(x,y,z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2 + C.$$

PROBLEMA 3.5

Hallar las derivadas direccionales de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x=0 \text{ ó } y=0, \\ 1 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

en el origen.

Solución

Por definición,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\big((0,0)+h(1,0)\big)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k-0}{k} = 1. \end{aligned}$$

Sin embargo, para cualquier otra dirección $\overrightarrow{u} = (a,b)$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$, la derivada direccional no existe pues $\dfrac{f(h\overrightarrow{u})-f(\overrightarrow{O})}{h} = \dfrac{1}{h}$ que no tiene límite cuando $h \to 0$.

PROBLEMA 3.6

Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

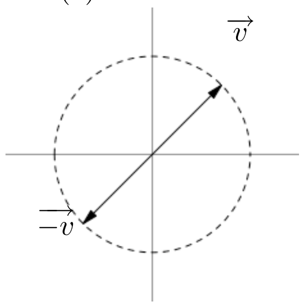
calcular las derivadas direccionales de f en el origen.

Solución

Elegimos una dirección arbitraria mediante el vector unitario $\overrightarrow{v} = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$. Entonces, si $t \neq 0$:

$$\Phi(t) = f(t\overrightarrow{v}) = f(t\cos\vartheta, t\operatorname{sen}\vartheta) = \frac{2t^2\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{t^2(\cos^2\vartheta+\operatorname{sen}^2\vartheta)} = \operatorname{sen} 2\vartheta.$$

Como $\Phi(0) = 1$, la función Φ será continua si $\operatorname{sen} 2\vartheta = 1$, es decir $\vartheta = \pi/4$ ó $\vartheta = 5\pi/4$. En estos casos, $\Phi'(0) = 0$. En el resto de valores de ϑ, Φ es discontinua en 0 con lo que $\Phi'(0)$ no existe.



Otra forma: Si $\overrightarrow{v} = (h, k)$ es un vector unitario,

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2t^2hk}{t^2(h^2+k^2)} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2hk-1}{t} \end{aligned}$$

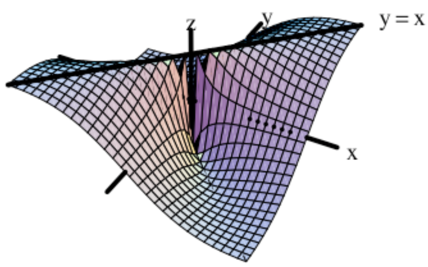
(observemos que $h^2 + k^2 = 1$).

El límite anterior no existe cuando el numerador es distinto de cero y es cero cuando el numerador se anula. Tenemos por tanto,

- Si $h = k = 1/\sqrt{2}$, entonces $D_{\vec{v}}f(0,0) = 0$.

- Si $h = k = -1/\sqrt{2}$, entonces $D_{\vec{v}}f(0,0) = 0$.

- En el resto de direcciones no existe $D_{\vec{v}}f(0,0)$.



PROBLEMA 3.7

Hallar las derivadas direccionales de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{y^2+x^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

en el origen.

Solución

Sea $\overrightarrow{u} = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$ un vector unitario arbitrario. Definimos

$$F(t) = f(t\overrightarrow{u}) = \frac{t \operatorname{sen}\vartheta \cos^2\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta + t^2\cos^4\vartheta}.$$

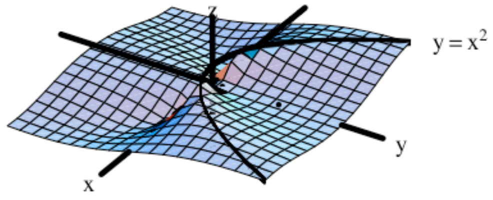
Entonces

$$\begin{aligned} f'(\overrightarrow{O}, \overrightarrow{u}) &= F'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}\vartheta \cos^2\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta + t^2\cos^4\vartheta} = \begin{cases} \cos\vartheta \operatorname{cotg}\vartheta & \text{si } \operatorname{sen}\vartheta \neq 0, \\ 0 & \text{si } \operatorname{sen}\vartheta = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Así pues, existe $f'(\overrightarrow{O}, \overrightarrow{u})$ para cualquier dirección $\overrightarrow{u}$. En particular, son nulas ambas derivadas parciales en el origen. Sin embargo, la función no es continua en el origen pues, aunque los límites iterados en el origen son nulos, si nos aproximamos a lo largo de la parábola $y = x^2$, tenemos

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

En la gráfica de la superficie se observa que, a lo largo de la parábola $y = x^2$, la función es constante pero toma el valor $1/2$, mientras que, a lo largo de los ejes de coordenadas, toma el valor cero.



PROBLEMA 3.8

Sea $f(x,y) = \begin{cases} x - y + 1 & \text{si } xy \geq 0 \\ y - x - 1 & \text{si } xy < 0. \end{cases}$

(a) Estudiar la continuidad de f.

(b) Calcular las derivadas direccionales de f en el origen.

Solución

(a) Fuera de los ejes $x = 0$, $y = 0$, la función es evidentemente continua.

- Veamos si es continua en un punto $(0, y_0)$ del eje $x = 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = \begin{cases} -y_0 + 1 & \text{(por un lado del eje)} \\ y_0 - 1 & \text{(por el otro lado del eje).} \end{cases}$$

Esto indica que la función es continua si $-y_0 + 1 = y_0 - 1$, es decir si $y_0 = 1$, y discontinua en los demás puntos del eje Y.

- Estudiemos ahora la continuidad en un punto $(x_0, 0)$ del eje $y = 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = \begin{cases} x_0 + 1 & \text{(por un lado del eje)} \\ -x_0 - 1 & \text{(por el otro lado del eje).} \end{cases}$$

Si $x_0 + 1 = -x_0 - 1$, es decir $x_0 = -1$, la función es continua; en el resto de los puntos del eje X, es discontinua.

En definitiva, la función es continua en

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq 0\} \cup \{(0,1),(-1,0)\}.$$

(b) Por definición de derivadas parciales,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+1-1}{h} = 1; \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k+1-1}{k} = -1.
\end{aligned}$$

Esto indica que existen ambas derivadas parciales en el origen.

Para calcular el resto de derivadas direccionales, sea $\overrightarrow{v} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ un vector unitario arbitrario, con $\cos\alpha \neq 0$ y $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$. Entonces:

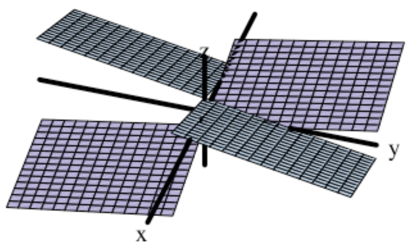
i) Si $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}}f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\alpha, t\operatorname{sen}\alpha)-f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\cos\alpha - t\operatorname{sen}\alpha + 1 - 1}{t} = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha.
\end{aligned}$$

ii) Si $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha < 0$,

$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}}f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\alpha, t\operatorname{sen}\alpha)-f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\operatorname{sen}\alpha - t\cos\alpha - 1 - 1}{t} = \infty.
\end{aligned}$$

Deducimos de lo anterior que, si el vector $\overrightarrow{v}$ apunta en la dirección del segundo o cuarto cuadrantes, la derivada direccional no existe.



PROBLEMA 3.9

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$ Se pide:

(a) Calcular las derivadas parciales $D_1 f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$.

(b) Calcular la derivada de la función en el punto $(0,0)$ según la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (a,b)$.

Solución

(a) Aplicando la definición de derivadas parciales, tenemos:

$$\begin{aligned} D_1 f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1, \\ D_2 f(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{k} = 1. \end{aligned}$$

(b) Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{v}$ es un vector unitario, es decir $a^2 + b^2 = 1$,

$$D_{\vec{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} \frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{1}{a+b} & \text{si } a+b \neq 0, \\ \lim\limits_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 & \text{si } a+b = 0. \end{cases}$$

2. DIFERENCIABILIDAD.

Debido a la existencia de funciones que poseen derivadas direccionales en un punto para cualquier dirección pero no son continuas en dicho punto, el concepto de derivada direccional no es el adecuado para generalizar el de derivada de funciones de una variable.

Es sabido que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $x = c$, la función

$$E_c(h) = \begin{cases} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} - f'(c) & \text{si } h \neq 0, \\ 0 & \text{si } h = 0, \end{cases}$$

verifica $\lim\limits_{h \to 0} E_c(h) = 0$. Además

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + hE_c(h)$$

(fórmula de Taylor de primer orden), de modo que $hE_c(h)$ representa el error cometido al aproximar $f(c+h) - f(c)$ por $hf'(c)$. Esta misma fórmula demuestra también que dicho error $hE_c(h)$ es un infinitésimo de orden superior a h cuando $h \to 0$, es decir $\lim\limits_{h \to 0} hE_c(h)/h = 0$.

Por otra parte, como función de h, la expresión $T_c(h) = h \cdot f'(c)$ es una función lineal.

Teniendo presente lo anterior, se puede dar una definición de derivada que extiende a la definición análoga para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Definición. Dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y un punto $\overrightarrow{x} \in \operatorname{int} D$, decimos que f es <u>diferenciable en $\overrightarrow{x}$</u> si existe una aplicación lineal $T_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{x}) + T_x(\overrightarrow{v}) + \|\overrightarrow{v}\| \cdot E_x(\overrightarrow{v}),$$

donde $\lim\limits_{\vec{v} \to \vec{0}} E_x(\overrightarrow{v}) = 0$ ó, lo que equivale a

$$\lim_{\vec{v} \to \vec{0}} \frac{f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{x}) - T_x(\overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{v}\|} = 0.$$

La función lineal $T_x(\overrightarrow{v})$ recibe el nombre de <u>derivada total</u> o <u>diferencial total</u> de f en $\overrightarrow{x}$, y se denota comúnmente por $df_{\vec{x}}(\overrightarrow{v})$.

Las primeras propiedades de la diferencial son las siguientes:

(1) *Si una función es diferenciable en un punto, su diferencial total es única.*

(2) *Si f es diferenciable en $\overrightarrow{x}$, entonces f es continua en $\overrightarrow{x}$.*

(3) *Si f es diferenciable en $\overrightarrow{x}$, existen las derivadas direccionales de f en $\overrightarrow{x}$ para cualquier dirección $\overrightarrow{v}$ ($\|\overrightarrow{v}\| = 1$) y además*

$$f'_{\vec{v}}(\overrightarrow{x}) = df_{\vec{x}}(\overrightarrow{v}).$$

(4) *Si descomponemos la función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ en sus componentes $f = (f_1, \dots, f_n)$, entonces f es diferenciable si y sólo si f_k es diferenciable, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.*

(5) *Si f es diferenciable en $\overrightarrow{x}$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, \dots, v_m)$ es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^m$, entonces*

$$df_{\vec{x}}(\overrightarrow{v}) = \sum_{k=1}^{m} D_k f(\overrightarrow{x}) \cdot v_k.$$

En el caso particular de campos escalares, es decir funciones $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, un pequeño abuso de notación (cuando no hay lugar a confusión) permite expresar la diferencial de forma similar a la notación utilizada para funciones de una variable. Para ello, indicamos una dirección arbitraria mediante el vector $\overrightarrow{v} = (dx_1, \dots, dx_n)$ y escribimos la diferencial como

$$df(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

sin hacer mención explícita de la dependencia de la diferencial con respecto a $\overrightarrow{v}$.

(6) Si llamamos <u>*vector gradiente*</u> de una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ en un punto $\overrightarrow{x}$ a

$$\overrightarrow{\nabla f}(\overrightarrow{x}) = \big(D_1 f(\overrightarrow{x}), \dots, D_m(\overrightarrow{x})\big),$$

de lo anterior se deduce la <u>*fórmula de Taylor de primer orden*</u>

$$f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{\nabla f}(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\| \cdot E_x(\overrightarrow{v}) \text{ con } \lim_{\vec{v} \to \vec{0}} E_x(\overrightarrow{v}) = 0,$$

para funciones $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

(7) Por otra parte, si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, como

$$df_{\vec{x}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\nabla f}(x) \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{\nabla f}(x)\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\alpha,$$

donde α es el ángulo entre $\overrightarrow{\nabla f}(x)$ y $\overrightarrow{v}$, su valor es máximo cuando $\overrightarrow{\nabla f}(x)$ tiene la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{v}$ (pues $\cos\alpha = 1$) y su valor es mínimo cuando tiene sentido contrario (ahora $\cos\alpha = -1$). En el primer caso, su valor es $df_{\vec{x}}(\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{\nabla f}(x)\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$.

Además, si $\overrightarrow{\nabla f}(x) \neq 0$, el vector gradiente apunta en la dirección de mayor crecimiento de f.

(8) (**Condición suficiente de diferenciabilidad.**) *Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función tal que existen las derivadas parciales $D_k f$ $(1 \le k \le m)$ y son continuas en una bola de centro $\overrightarrow{x}$. Entonces f es diferenciable en $\overrightarrow{x}$.*

El recíproco es falso: en el problema 3.19 encontramos un ejemplo de una función diferenciable pero donde no son continuas las derivadas parciales.

(9) (**Forma matricial de la derivada.**) Debido a que la diferencial de una función es una aplicación lineal, puede definirse mediante su representación matricial con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Se define así la <u>matriz jacobiana</u> de una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ en un punto x_0 a

$$Jf(x_0) = Df(x_0) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x_0) & \dots & D_m f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(x_0) & \dots & D_m f_n(x_0) \end{pmatrix}$$

donde f_k $(1 \le k \le n)$ es la k-ésima función componente de f y $D_j f_k$ $(1 \le j \le m)$ la j-ésima derivada parcial de f_k.

La fila k-ésima de dicha matriz es $\big(D_1 f_k(x_0), \dots, D_m f_k(x_0)\big)$ y coincide precisamente con el <u>vector gradiente</u> de f_k en x_0.

(10) (**Teorema del valor medio.**) Un resultado interesante, que extiende en cierto modo al correspondiente para funciones de una variable, es el teorema del valor medio.

Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en un abierto $D \subset \mathbb{R}^m$. Sean $x, y \in D$ dos puntos tales que el segmento que los une $[x, y]$ está contenido en D. Entonces

$$\forall \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n,\ \exists z \in [x, y] : \overrightarrow{a} \cdot \big(\overrightarrow{f(y)} - \overrightarrow{f(x)}\big) = \overrightarrow{a} \cdot f'(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{y - x}).$$

En el caso particular de que $n = 1$, se puede tomar $a = 1$ y el teorema toma la forma conocida

$$f(\overrightarrow{y}) - f(\overrightarrow{x}) = f'(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{y - x}) = \overrightarrow{\nabla} f(z) \cdot (\overrightarrow{y - x}).$$

Si $n \ne 1$, lo anterior puede no ser cierto, como se comprueba con la función $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$; en este caso, $f(2\pi) - f(0) = (0, 0)$, pero, para cualquier $t \in [0, 2\pi]$,

$$f'(t, 2\pi) = 2\pi(-\operatorname{sen} t, \cos t),$$

que es un vector de longitud 2π y, por tanto, no nulo.

Como corolario del teorema del valor medio, se puede demostrar también que, si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable en Ω, donde Ω es un abierto y conexo de $\mathbb{R}^m$ (o bien convexo), y $df(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$, entonces f es constante.

(11) (**Derivación bajo el signo integral.**) Si una función de dos variables viene definida mediante una integral, para calcular sus derivadas aplicamos el siguiente resultado:

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función continua en un conjunto compacto* $D \subset \mathbb{R}^2$ *tal que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *es también continua en* D.

(a) *Si definimos*

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy,$$

entonces F *es derivable y*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

(b) *Si* $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *son dos funciones derivables, entonces*

$$F(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dy$$

es también derivable y

$$F'(x) = f\big(x, h_2(x)\big)\cdot h_2'(x) - f\big(x, h_1(x)\big)\cdot h_1'(x) + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

PROBLEMA 3.10

Para las siguientes funciones, hallar la derivada direccional en el punto P y según la dirección que se indica:

(a) $f(x,y,z) = x^2y + xze^y - xye^z$,

$P = (-2,3,0)$, $\overrightarrow{v} = (1/3, -2/3, 1/3)$.

(b) $f(x,y,z) = (x/y)^z$, $\qquad P = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v} = (2,1,-1)$.

Solución

Aplicaremos en ambos casos la fórmula $f'_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\nabla f}(x) \cdot \overrightarrow{v}/\|\overrightarrow{v}\|$.

(a) $\overrightarrow{\nabla f}(x,y,z) = (2xy + ze^y - ye^z, x^2 + xze^y - xe^z, xe^y - xye^z)$;

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla f}(-2,3,0) &= (-15,6,-2e^3+6);\ \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{2/3};\\ f'_{\vec{v}}(-2,3,0) &= \frac{1}{\sqrt{2/3}}(-15,6,-2e^3+6)\cdot\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{-21-2e^3}{\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

(b) $\overrightarrow{\nabla f}(x,y,z) = \left(\frac{z}{y}\cdot(x/y)^{z-1}, \frac{-xz}{y^2}\cdot(x/y)^{z-1}, (x/y)^z\ln(x/y)\right)$;

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla f}(1,1,1) &= (1,-1,0);\ \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{6};\\ f'_{\vec{v}}(1,1,1) &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,0)\cdot(2,1,-1) = \frac{1}{\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.11

Estudiar la diferenciabilidad en el origen de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(4\,\mathrm{arc\,tg}\,y/x) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Solución

Comprobemos en primer lugar que la función es continua en el origen. Tomamos para ello $\varepsilon > 0$ arbitrario y elegimos $\delta = \varepsilon$. Si un punto (x,y) pertenece a la bola centrada en el origen y de radio δ, es decir $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, entonces

$$|x\,\mathrm{sen}(4\,\mathrm{arc\,tg}\,y/x)| \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon.$$

Calculamos a continuación las derivadas parciales en el origen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{h\,\mathrm{sen}(4\,\mathrm{arc\,tg}\,0)}{h} = 0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = 0.\end{aligned}$$

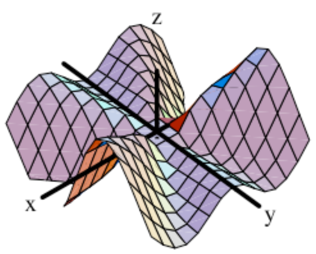
Para que la función sea diferenciable debe ser cero el límite

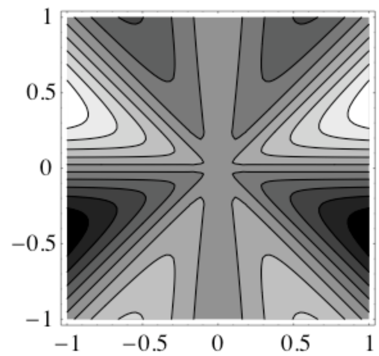
$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\\ =&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x\,\mathrm{sen}(4\,\mathrm{arc\,tg}\,y/x)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|.\end{aligned}$$

Ahora bien, si nos acercamos al origen mediante rectas arbitrarias $y = mx$, el límite anterior queda de la forma:

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{x}{|x|\sqrt{1+m^2}} \operatorname{sen}(4 \operatorname{arc\,tg} m) \right| \neq 0.$$

Deducimos pues que la función no es diferenciable en el origen.





En la gráfica de las curvas de nivel de la función, la región más oscura representa los valores menores de la función y la región más clara representa los valores mayores de la función. Se puede observar así la variación de la función en un entorno del origen.

PROBLEMA 3.12

Sea

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^2z}{x^3+y^6+z^3} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Demostrar que existen las derivadas parciales f'_x, f'_y, f'_z *en* $(0,0,0)$, *pero que* f *no es diferenciable en* $(0,0,0)$.

Solución

Las derivadas parciales en el origen valen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0,0) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k,0) - f(0,0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) &= \lim_{j\to 0} \frac{f(0,0,j) - f(0,0,0)}{j} = \lim_{j\to 0} \frac{0}{j} = 0. \end{aligned}$$

Una condición necesaria para que la función sea diferenciable es que sea continua. Veamos que no lo es en el origen.

Observamos en primer lugar que los límites iterados toman todos el valor cero; sin embargo, si calculamos el límite de la función a lo largo de la curva $x = y^2 = z$, resulta:

$$\lim_{x\to 0} f(x, \sqrt{x}, x) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x \cdot x}{x^3 + x^3 + x^3} = \frac{1}{3},$$

distinto de cero.

Deducimos de lo anterior que la función no es diferenciable en el origen.

Con este problema y el anterior, hemos comprobado que la existencia de derivadas parciales no es condición suficiente para la diferenciabilidad de una función.

PROBLEMA 3.13

Calcular las derivadas parciales en el punto $(0,0)$ y estudiar la diferenciabilidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solución

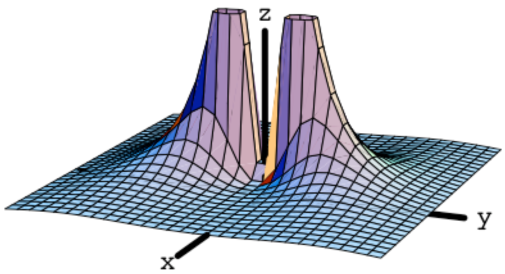
i) La función no es continua en el origen porque, si calculamos el límite a lo largo de las rectas $y = mx$, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{1+m^2}{1+m^4x^2} = 1 + m^2,$$

el cual depende de la pendiente m. Concluimos entonces que la función no es diferenciable en el origen.

ii) Las derivadas parciales en el origen son, por definición,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1/k^2 - 1}{k} = \infty.
\end{aligned}$$



PROBLEMA 3.14

Estudiar la diferenciabilidad de la función

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (\operatorname{sen}(xz), ze^{xy}, 1/z) & \text{si } z \neq 0, \\ (0,0,0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Solución

Descomponemos la función en sus componentes y estudiamos la diferenciabilidad de cada una de ellas.

Por una parte, las funciones $f_1(x,y,z) = \begin{cases} \operatorname{sen}(xz) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$ y $f_2(x,y,z) = \begin{cases} ze^{xy} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$ son evidentemente diferenciables en los puntos donde $z \neq 0$.

Ahora bien, la función $f_3(x,y,z) = \begin{cases} 1/z & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$ no es diferenciable en $z = 0$ (pues ni siquiera es continua).

Deducimos entonces que la función dada es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ excepto en los puntos del plano $z = 0$.

PROBLEMA 3.15

Estudiar la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales en el origen de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solución

i) Debido a la acotación

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|xy|}{|x|} = |y| \le \sqrt{x^2+y^2},$$

deducimos que la función es continua en el origen (basta hacer $\delta = \varepsilon$ para que $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$, si $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$).

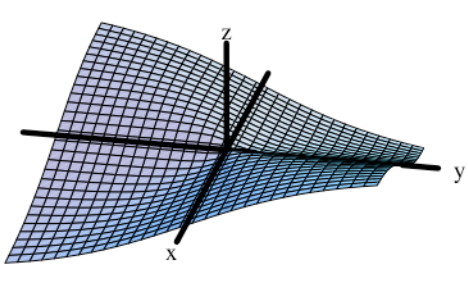
ii) Veamos que existen las derivadas parciales en el origen:

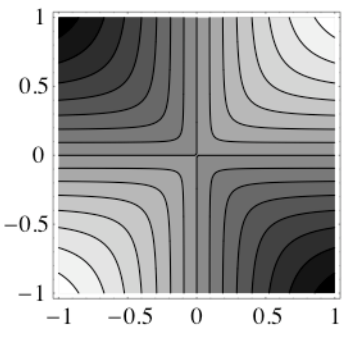
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0. \end{aligned}$$

iii) A continuación, probaremos que f no es diferenciable en el origen:

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{f(a,b) - f(0,0) - aD_1f(0,0) - bD_2f(0,0)}{\sqrt{a^2+b^2}} = \lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{ab}{a^2+b^2}.$$

Este límite no existe pues el resultado varía según las distintas rectas $b = ma$.





Vemos con este problema que la existencia de derivadas parciales añadida a la continuidad de una función tampoco es condición suficiente de diferenciabilidad.

PROBLEMA 3.16

Sea n un número natural y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+y)^n \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

¿Cómo hay que elegir n para que

(a) f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$?

(b) f sea diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$?

Solución

(a) Teniendo en cuenta la acotación

$$\left| \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq 1, \ \forall (x, y) \neq (0, 0),$$

y que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)^n = 0$ si y sólo si $n > 0$, deducimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0) \Longleftrightarrow n > 0.$$

Por tanto, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la función es continua en $\mathbb{R}^2$.

(b) Es evidente que la función es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ salvo quizás en el origen.

Para que f sea diferenciable en el origen, es necesario que existan ambas derivadas parciales. Ahora bien,

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^n \operatorname{sen}(1/|h|)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{n-1} \operatorname{sen}(1/|h|) = 0$$

siempre que $n - 1 > 0$ pero no existe cuando $n = 1$. Análogamente, $D_2 f(0, 0) = 0$ si $n > 1$. Debemos, pues, suponer por el momento que $n \geq 2$.

Por otra parte, para que f sea diferenciable, debe ser

$$0=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-hD_1f(0,0)-kD_2f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

En nuestra situación,

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h+k)^n\operatorname{sen}[(h^2+k^2)^{-1/2}]}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ \iff 0 &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h+k)^n}{\sqrt{h^2+k^2}}\iff 0=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h+k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot(h+k)^{n-2}.\end{aligned}$$

Como $n-2\geq 0$, f será diferenciable si se anula el límite del cociente $\dfrac{(h+k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$.

Ahora bien, si tenemos en cuenta las siguientes acotaciones:

$$0\leq\frac{(h+k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}+\frac{2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\leq\sqrt{h^2+k^2}+\frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=2\sqrt{h^2+k^2},$$

deducimos que, en efecto, $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h+k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$. Por tanto, f es diferenciable si $n\geq 2$.

PROBLEMA 3.17

Se considera la función $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ x+y & \text{si } x=y.\end{cases}$

(a) Estudiar la continuidad de f en los puntos de la recta $x=y$.

(b) Calcular las derivadas parciales de f en el origen.

(c) ¿Es f diferenciable en el origen?

Solución

(a) Veamos si f es continua en los puntos de la forma (a,a). En primer lugar es evidente que $f(a,a)=2a$. Además

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to a}\frac{x^3-y^3}{x-y}\right)=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)=3a^2.$$

De aquí se concluye que la función es discontinua en el punto (a,a) cuando $2a\neq 3a^2$, es decir cuando $a\neq 0$ y $a\neq 2/3$. En los puntos $(0,0)$ y $(2/3,2/3)$ es continua (basta calcular los límites).

(b) Por definición, las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2-0}{h} = 0;\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{k^2-0}{k} = 0.
\end{aligned}$$

(c) Para ver si f es diferenciable, debemos calcular el siguiente límite:

$$L = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-hf'_x(0,0)-kf'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Distinguiremos dos casos:

- Si $h \neq k$,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{h^3-k^3}{h-k}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2+hk+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2} + \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k}{\sqrt{1+(k/h)^2}} = 0,
\end{aligned}$$

pues el denominador es mayor que 1.

- Si $h = k$,

$$L = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h+k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0}\frac{2h}{\sqrt{2h^2}} = \pm\sqrt{2}.$$

Deducimos por tanto que el límite L no existe y, en consecuencia, f no es diferenciable en el origen.

PROBLEMA 3.18

Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 + x^2\,\mathrm{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0,\\ y & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Solución

(a) En el conjunto $\{(x,y) : x \neq 0\}$ la función es evidentemente continua. Estudiemos la continuidad en un punto $(0,y_0)$. Como

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \big(y^2 + x^2 \operatorname{sen}(1/x)\big) &= y_0^2, \\ f(0,y_0) &= y_0, \end{aligned}$$

la función será continua en $(0,y_0)$ cuando $y_0 = y_0^2$, es decir cuando $y_0 = 0$ ó $y_0 = 1$. En los puntos $(0,y_0)$, con $y_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 1$, la función es discontinua.

(b) En el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ la función es diferenciable (observar que, en este conjunto, la función es suma de dos funciones de una variable, ambas derivables).

Como la función no es continua en los puntos $(0,y_0)$, con $y_0 \neq 0$, $y_0 \neq 1$, tampoco es diferenciable en dichos puntos. Estudiemos por separado la diferenciabilidad de la función en los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$.

- En $(0,0)$: Como

$$\begin{aligned} D_1 f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}(1/h)}{h} = 0, \\ D_2 f(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{k} = 1, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hD_1 f(0,0) - kD_2 f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ = & \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^2 + h^2 \operatorname{sen}(1/h) - k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ = & \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^2 - k}{\sqrt{h^2+k^2}} + \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 \operatorname{sen}(1/h)}{\sqrt{h^2+k^2}}. \end{aligned}$$

El primer límite no existe (como se puede comprobar calculando el límite a lo largo de cualquier trayectoria de la forma $k = mh$) y el segundo límite es cero. Se deduce por tanto que el límite anterior no existe, de modo que la función no es diferenciable en el origen.

- En $(0,1)$: Como

$$\begin{aligned} D_1 f(0,1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}(1/h)}{h} = 0, \\ D_2 f(0,1) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,1+k) - f(0,1)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1+k-1}{k} = 1, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,1+k)-f(0,1)-hD_1f(0,1)-kD_2f(0,1)}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
=&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(1+k)^2+h^2\operatorname{sen}(1/h)-(1+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
=&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k(1+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}+\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2\operatorname{sen}(1/h)}{\sqrt{h^2+k^2}}.
\end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior, dicho límite no existe, por lo que la función tampoco es diferenciable en el punto $(0,1)$.

PROBLEMA 3.19

Se considera la función

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(a) Estudiar su continuidad en el origen.

(b) Calcular la derivada direccional de f en el origen según la dirección del vector unitario $\overrightarrow{v}=(a,b)$. Deducir de ahí las derivadas parciales de f en el origen.

(c) ¿Es f'_x continua en $(0,0)$?

(d) ¿Es f diferenciable en el origen?

Solución

(a) Como $\operatorname{sen}(x^2+y^2)^{-1}$ es una función acotada si $(x,y)\neq(0,0)$ y $x^2+y^2\to 0$ cuando $(x,y)\to(0,0)$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0),$$

de modo que f es continua en el origen.

(b) Aplicando la definición,

$$D_{\vec{v}}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2(a^2+b^2)\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h^2(a^2+b^2)}}{h}=0.$$

La derivada en el origen es cero en cualquier dirección. En particular, las derivadas parciales son también cero.

(c) Aplicando las reglas usuales de derivación, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\cdot\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 2x\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[2x\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right].$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x = 0$ y $\operatorname{sen}[1/(x^2+y^2)]$ está acotada, el primer sumando tiene límite cero.

Ahora bien, como $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = \infty$, el segundo sumando no tiene límite.

En definitiva, la derivada parcial de f respecto a x no es continua en el origen.

(d) Teniendo en cuenta que las derivadas parciales en el origen son ambas nulas, para que la función sea diferenciable, debe anularse el límite

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ahora bien, como

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2},$$

y la función trigonométrica está acotada, es evidente que dicho límite es cero.

Observemos que este problema proporciona un contraejemplo al recíproco de la condición suficiente de diferenciabilidad (propiedad (8) del resumen teórico): *una función puede ser diferenciable en un punto donde alguna de las derivadas parciales no es continua.*

PROBLEMA 3.20

Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto P y supongamos que $\|\overrightarrow{\nabla f}(P)\|\neq 0$. Probar que existe un vector unitario $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ y uno sólo tal que

$$D_{\vec{v}}f(P) = \|\overrightarrow{\nabla f}(P)\|,$$

y que éste es el vector unitario para el cual $D_{\vec{v}}f(P)$ alcanza su máximo.

Solución

Como
$$D_{\vec{v}}f(P) = \overrightarrow{\nabla f}(P) \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{\nabla f}(P)\| \cdot \cos\alpha,$$
el máximo se alcanza cuando $\cos\alpha = 1$, es decir cuando $\overrightarrow{v}$ tiene la dirección de $\overrightarrow{\nabla f}(P)$ y su valor es precisamente
$$D_{\vec{v}}f(P) = \|\overrightarrow{\nabla f}(P)\|.$$

PROBLEMA 3.21

Hallar la derivada de la función $f(x, y, z) = x^2 - 3yz - 5$ en el punto $M(1, 2, -1)$ en la dirección en que esta derivada sea máxima.

Solución

En primer lugar, calculamos el vector gradiente:
$$\overrightarrow{\nabla f}(x, y, z) = (2x, -3z, -3y) \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla f}(M) = (2, 3, -6).$$
Por tanto, tal como se deduce del problema anterior,
$$\|\overrightarrow{\nabla f(M)}\| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$$
es el valor de la derivada en la dirección donde esta es máxima.

PROBLEMA 3.22

Determinar los valores de los parámetros a, b y c para que la derivada direccional de la función
$$f(x, y, z) = ax^2z + byz^3 + cx^2y^2$$
alcance el valor máximo de 25 en el punto $P = (1, 1, 2)$ según una dirección paralela al eje OX.

Solución

El vector unitario en la dirección donde la derivada direccional es máxima es $\overrightarrow{v} = (1, 0, 0)$. Por hipótesis, $25 = D_{\vec{v}}f(P)$.

Calculamos en primer lugar el gradiente de la función en el punto P:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla f}(x,y,z) &= (2axz + 2cxy^2, bz^3 + 2cx^2y, ax^2 + 3byz^2),\\ \overrightarrow{\nabla f}(P) &= (4a+2c, 8b+2c, a+12b).\end{aligned}$$

Aplicamos ahora las condiciones $\overrightarrow{\nabla f}(P) \| \overrightarrow{v}$ y $25 = \overrightarrow{\nabla f}(P) \cdot \overrightarrow{v}$, y obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 8b + 2c &= 0\\ a + 12b &= 0\\ 4a + 2c &= 25.\end{aligned}$$

La solución de este sistema está dada por los valores $a = 75/14$, $b = -25/56$ y $c = 25/14$.

PROBLEMA 3.23

¿En qué dirección la derivada de $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ en el punto $(1,2)$ es mínima y cuál es su valor?

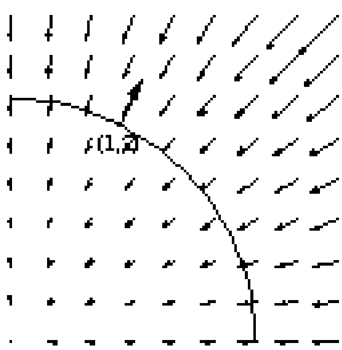
Solución

El gradiente de la función es:

$$\overrightarrow{\nabla z} = \left(\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla z}(1,2) = \Big(\frac{-1}{\sqrt{20}}, \frac{-2}{\sqrt{20}}\Big).$$

La derivada es máxima en la dirección de un vector paralelo a $\overrightarrow{\nabla z}(1,2)$, por ejemplo $\overrightarrow{v} = (-1,-2)$, y será mínima en la dirección del vector opuesto $\overrightarrow{-v} = (1,2)$. Su valor es

$$z'_{-\vec{v}}(1,2) = -\|\overrightarrow{\nabla z}(1,2)\| = -\sqrt{5/20} = -1/2.$$



En la gráfica se muestra la curva de nivel $z = f(1,2)$ y el campo de gradientes (los valores del vector gradiente en cada uno de los puntos). En el punto $(1,2)$, el gradiente es paralelo al vector $(1,2)$ pero de sentido contrario.

PROBLEMA 3.24

¿En qué dirección es nula la derivada de $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ *en el punto* $(1,1)$*?*

Solución

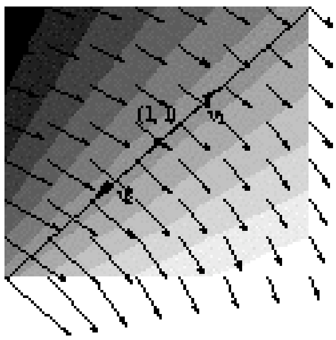
El gradiente de la función dada es:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x,y) = \left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \right) \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla f}(1,1) = (1,-1).$$

Si $\overrightarrow{v} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, entonces

$$f'_{\overrightarrow{v}}(1,1) = (1,-1) \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha$$

y será $f'_{\overrightarrow{v}}(1,1) = 0$ cuando $\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha$, es decir cuando $\alpha = \pi/4$ ó $\alpha = 5\pi/4$. En consecuencia, en la dirección de los vectores $\overrightarrow{v_1} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $\overrightarrow{v_2} = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ la derivada direccional se anula.



En la gráfica adjunta se ilustra el campo de gradientes sobre una representación de las curvas de nivel. En el punto $(1,1)$, los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ son perpendiculares al gradiente.

PROBLEMA 3.25

Hallar la derivada de la función $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en la dirección de su gradiente (expresar la respuesta en función de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

Solución

Como $\overrightarrow{\nabla u} = (-x/r^3, -y/r^3, -z/r^3)$, si llamamos $\overrightarrow{v}$ al vector unitario en la dirección del gradiente, entonces

$$u'_{\vec{v}}(x, y, z) = \|\overrightarrow{\nabla u}\| = \sqrt{r^2/r^6} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{r^2}.$$

PROBLEMA 3.26

Dada la función $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2) + e^z$ y los puntos $P(0, 1, 0)$, $P'(-4, 2, 3)$, hallar $D_{\vec{v}}f(P)$, donde

(a) $\overrightarrow{v}$ es un vector unitario en la dirección PP'.

(b) $\overrightarrow{v}$ es un vector unitario tal que $D_{\vec{v}}f(P)$ es un máximo.

Solución

El gradiente de la función en el punto P es:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}, e^z \right) \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla f}(P) = (0, 2, 1).$$

(a) El vector unitario en la dirección PP' es:

$$\overrightarrow{v} = \frac{PP'}{\|PP'\|} = \frac{(-4, 1, 3)}{\sqrt{16 + 1 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{26}}(-4, 1, 3).$$

La derivada direccional se calcula entonces como sigue:

$$D_{\vec{v}}f(P) = \overrightarrow{\nabla f(P)} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{26}}(0, 2, 1) \cdot (-4, 1, 3) = \frac{5}{\sqrt{26}}.$$

(b) Si $D_{\vec{v}}f(P)$ es máxima, entonces

$$D_{\vec{v}}f(P) = \|\overrightarrow{\nabla f}(P)\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

y $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{\nabla f}(P)}{\|\overrightarrow{\nabla f}(P)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(0,2,1).$

PROBLEMA 3.27

Sea f una función real definida en $\mathbb{R}^n$ por $f(\overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{x}\|^4$.

(a) Calcular $f'_{\vec{v}}(\overrightarrow{x})$.

(b) Si $n = 2$, hallar todos los (x,y) para los que $f'_{(x,y)}(2,3) = 6$.

Solución

Por definición, $f(\overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{x}\|^4 = (\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x})^2 = (x_1^2+\dots+x_n^2)^2$. Entonces

$$\overrightarrow{\nabla f}(\overrightarrow{x}) = (4x_1\|\overrightarrow{x}\|^2, \dots, 4x_n\|\overrightarrow{x}\|^2).$$

(a) Si $\overrightarrow{v} = (v_1,\dots,v_n)$, como $f'_{\vec{v}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\nabla f}(x)\cdot\overrightarrow{v}$, resulta

$$f'_{\vec{v}}(\overrightarrow{x}) = 4\|\overrightarrow{x}\|^2\sum_{i=1}^n x_iv_i = 4\|\overrightarrow{x}\|^2\cdot(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{v}).$$

(b) Aplicando el resultado anterior, será

$$f'_{(x,y)}(2,3) = 4\|(2,3)\|^2\big((2,3)\cdot(x,y)\big) = 4\cdot 13\cdot(2x+3y) = 6$$

si y sólo si $2x+3y = 3/26$.

PROBLEMA 3.28

Una función diferenciable tiene en el punto $P = (1,2)$ las derivadas direccionales 2 en dirección al punto $P_1 = (2,2)$ y -2 en dirección al punto $P_2 = (1,1)$, respectivamente. Determinar el vector gradiente en P y calcular la derivada direccional en dirección al punto $Q = (4,6)$.

Solución

Llamaremos $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{PP_1} = (1,0)$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{PP_2} = (0,-1)$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = (3,4)$.

Si llamamos $\overrightarrow{\nabla f}(1,2) = (a,b)$, tenemos:

$$\begin{aligned} 2 &= f'_{\vec{v_1}}(1,2) = \overrightarrow{\nabla f}(1,2) \cdot \overrightarrow{v_1} = a, \\ -2 &= f'_{\vec{v_2}}(1,2) = \overrightarrow{\nabla f}(1,2) \cdot \overrightarrow{v_2} = -b. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que $\overrightarrow{\nabla f}(1,2) = (2,2)$ y

$$f'_{\vec{v}}(1,2) = \overrightarrow{\nabla f}(1,2) \cdot \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{1}{5}\,(2,2) \cdot (3,4) = \frac{14}{5}.$$

PROBLEMA 3.29

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua en un compacto $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ también es continua en D. Si definimos $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(x,y)\,dy$, probar que

$$F'(x) = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Solución

Elegimos arbitrariamente un punto x_0. Entonces

$$F(x) = \int_0^{x_0} f(x,y)\,dy + \int_{x_0}^x f(x,y)\,dy,$$

de donde,

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_0^{x_0} f(x,y)\,dy + \int_{x_0}^x f(x,y)\,dy - \int_0^{x_0} f(x_0,y)\,dy \\ &= \int_0^{x_0} [f(x,y) - f(x_0,y)]\,dy + \int_{x_0}^x f(x,y)\,dy. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio, resulta

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \int_0^{x_0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0}\,dy + \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x,y)\,dy \\ &= \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial x} f(t_1,y)\,dy + f(x,t_2), \end{aligned}$$

donde t_1 y t_2 son dos valores comprendidos entre x_0 y x.

Basta calcular el límite cuando x tiende a x_0 para obtener:

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y)\, dy + f(x_0, x_0).$$

PROBLEMA 3.30

Dada la función $F(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{y}\, dy$, *hallar* $F'(x)$.

Solución

De acuerdo al resultado enunciado en (11) del resumen teórico, como la función $\operatorname{sen}(xy)/y$ es continua, la derivada de F viene dada por la fórmula:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\operatorname{sen}(x^2+x)}{x+1} - \frac{\operatorname{sen}(x^2-x)}{x-1} + \int_{x-1}^{x+1} \cos(xy)\, dy \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x^2+x)}{x+1} - \frac{\operatorname{sen}(x^2-x)}{x-1} + \frac{\operatorname{sen}(x^2+x)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(x^2-x)}{x}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3.31

Sea f una función continua y definimos

$$h(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t-z) f(z)\, dz.$$

Comprobar que se verifica

$$\begin{gathered} h''(t) + h(t) = f(t) \\ h(0) = h'(0) = 0. \end{gathered}$$

Solución

De acuerdo con el resultado general probado en el problema 3.29, tenemos:

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \operatorname{sen}(t-t)f(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{sen}(t-z)f(z)\,dz = \int_0^t \cos(t-z)f(z)\,dz;\\
h''(t) &= \cos(t-t)f(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\cos(t-z)f(z)\,dz\\
&= f(t) - \int_0^t \operatorname{sen}(t-z)f(z)\,dz = f(t) - h(t),
\end{aligned}$$

como queríamos probar. Las condiciones iniciales $h(0) = h'(0) = 0$ son evidentes.

3. PLANO TANGENTE.

En esta sección se da la interpretación geométrica de la diferencial, para lo cual consideraremos el caso particular de funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Si f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) y llamamos $z_0 = f(x_0, y_0)$, sabemos que

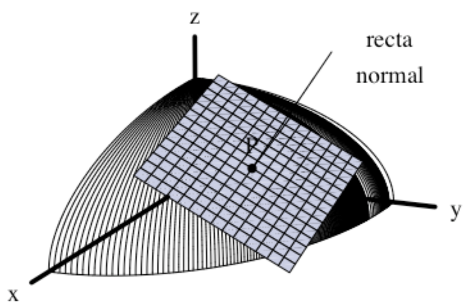
$$z - z_0 = D_1f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + D_2f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + E(x - x_0, y - y_0),$$

donde E es un infinitésimo de orden superior a $\|(x - x_0, y - y_0)\|$.

El plano de ecuación

$$z - z_0 = D_1f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + D_2f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

contiene a las rectas tangentes a las curvas que son la intersección de la superficie con los planos $x = x_0$ e $y = y_0$ (pues el producto escalar de su vector tangente $(D_1f(x_0, y_0), D_2f(x_0, y_0), -1)$ por los vectores directores de dichas tangentes, $(0, 1, D_2f(x_0, y_0))$ y $(1, 0, D_1f(x_0, y_0))$, es nulo).



Dicho plano contiene además a la tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) a cualquier curva de la superficie que pase por (x_0, y_0, z_0). Por esta razón, el plano citado recibe el nombre de <u>plano tangente</u> a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0). La recta perpendicular a dicho plano por el punto (x_0, y_0, z_0) se llama <u>recta normal</u> a la superficie. La ecuación de la recta normal es, pues,

$$\frac{x - x_0}{D_1f(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{D_2f(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

En general, si una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es la superficie de nivel de una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, es decir S tiene por ecuación $f(x, y, z) = k$, la ecuación del plano tangente a dicha superficie en un punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

lo que significa que el vector gradiente es perpendicular al plano tangente a dicha superficie.

PROBLEMA 3.32

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto indicado:

(a) $z = x^2 + 4y^2,\ P = (2, -1, 8)$.

(b) $x = e^{2y-z},\ P = (1, 1, 2)$.

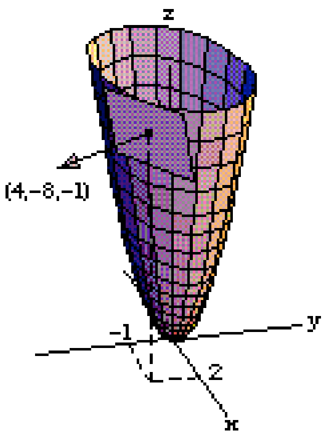
Solución

(a) Las derivadas parciales de la función son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 8y,$$

de modo que, al sustituirlas en el punto dado, nos da el vector normal al plano tangente $\overrightarrow{v} = (4, -8, -1)$. La ecuación de dicho plano es, por tanto,

$$z - 8 = 4(x - 2) - 8(y + 1) \text{ o bien } 4x - 8y - z = 8.$$



(b) En este caso derivamos x con respecto a las variables y y z:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 2e^{2y-z}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -e^{2y-z} \Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial y}(P) = 2, \quad \frac{\partial x}{\partial z}(P) = -1.$$

Un vector normal al plano tangente es ahora $\overrightarrow{v} = (-1, 2, -1)$ y la ecuación de este plano es

$$(x - 1) = 2(y - 1) - (z - 2), \text{ es decir } x - 2y + z = 1.$$

PROBLEMA 3.33

Probar que las superficies

$$3x^2 + 2y^2 - 2z = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$$

son perpendiculares en el punto $(1, 1, 2)$.

Solución

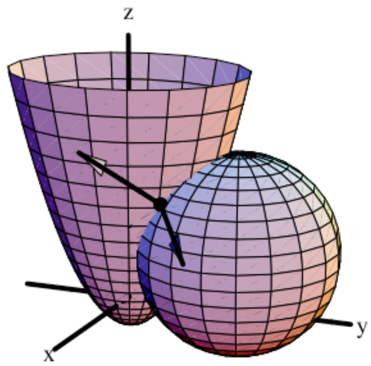
Para que dos superficies sean perpendiculares, basta que lo sean los vectores directores de sus planos tangentes. Si llamamos $f_1(x, y, z) = 3x^2+2y^2-2z-1$ y $f_2(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-4y-2z+2$, sus respectivos gradientes son

$$\overrightarrow{\nabla f_1}(x, y, z) = (6x, 4y, -2)\ , \quad \overrightarrow{\nabla f_2}(x, y, z) = (2x, 2y-4, 2z-2).$$

Por tanto,

$$\overrightarrow{\nabla f_1}(1, 1, 2) = (6, 4, -2)\ , \quad \overrightarrow{\nabla f_2}(1, 1, 2) = (2, -2, 2).$$

El producto escalar de estos vectores es 0, lo que significa que son perpendiculares.



PROBLEMA 3.34

Hallar una constante C para que, en todo punto de la intersección de las esferas

$$(x-C)^2+y^2+z^2=3;\ \ x^2+(y-1)^2+z^2=1,$$

los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares.

Solución

Llamamos (x_0, y_0, z_0) a un punto de intersección de ambas esferas. El plano tangente a cada una de las esferas tiene vector normal el gradiente de la función de tres variables que tiene por superficie de nivel dicha esfera. Estos vectores son, respectivamente:

$$\overrightarrow{v} = (2(x_0-C), 2y_0, 2z_0)\ ,\quad \overrightarrow{w} = (2x_0, 2(y_0-1), 2z_0).$$

Para que sean perpendiculares los planos tangentes, el producto escalar de estos vectores debe ser nulo. Construimos pues el sistema de ecuaciones (teniendo en cuenta que ambas superficies pasan por el punto (x_0, y_0, z_0)):

$$\begin{aligned} 4x_0(x_0-C)+4y_0(y_0-1)+4z_0^2 &= 0 \\ (x_0-C)^2+y_0^2+z_0^2 &= 3 \\ x_0^2+(y_0-1)^2+z_0^2 &= 1. \end{aligned}$$

Eliminando variables, obtenemos las dos posibles soluciones $C = \pm\sqrt{3}$.

PROBLEMA 3.35

Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(2,1,-2)$ y es paralelo al plano tangente a la superficie $x^2+y^2+z^2=12$ en $(2,-2,2)$.

Solución

Si definimos la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-12$, entonces el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$ es normal al plano tangente a la superficie por un punto arbitrario (x_0, y_0, z_0); en el punto dado, dicho vector es $\overrightarrow{v} = (4, -4, 4)$.

De este modo, el plano que pasa por el punto $(2, 1, -2)$ y es paralelo al plano anterior tiene por ecuación

$$4(x-2) - 4(y-1) + 4(z+2) = 0 \quad \text{o bien} \quad x - y + z = -1.$$

> **PROBLEMA 3.36**
>
> *Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección del plano $6x + 3y + 2z = 5$ con el cono $z^2 = 4x^2 + 9y^2$ por el punto $(2, 1, -5)$.*

Solución

Construimos las funciones $f(x,y) = \dfrac{-6x - 3y + 5}{2}$ y $g(x,y) = -\sqrt{4x^2 + 9y^2}$ que representan al plano y al cono, respectivamente (observar el signo "$-$" de la raíz debido a la posición del punto de intersección de las superficies).

Las derivadas parciales de ambas funciones en el punto dado son:

$$f'_x(x,y) = -3\ , \qquad f'_y(x,y) = -3/2;$$

$$g'_x(x,y) = \frac{4x}{g(x,y)},\ g'_y(x,y) = \frac{9y}{g(x,y)} \Longrightarrow g'_x(2,1) = -8/5,\ g'_y(2,1) = -9/5.$$

De aquí deducimos que los vectores $\overrightarrow{v_1} = (-3, -3/2, -1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (-8/5, -9/5, -1)$ son perpendiculares al plano y al cono, respectivamente. Un vector tangente a la curva intersección de ambos es

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & -3/2 & -1 \\ -8/5 & -9/5 & -1 \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{10}, -\frac{7}{5}, 3\right).$$

En definitiva, la recta tangente a la curva citada tiene por ecuación

$$r(t) = \left(2 - \frac{3t}{10}, 1 - \frac{7t}{5}, -5 + 3t\right).$$

> **PROBLEMA 3.37**
>
> *Demostrar que la suma de los cuadrados de las intersecciones con los ejes coordenados de todo plano tangente a la superficie $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ es constante.*

Solución

Podemos considerar la superficie dada como una superficie de nivel de la función $g(x,y,z) = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3}$. El gradiente de dicha función en un punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie es

$$\overrightarrow{\nabla} g(x_0, y_0, z_0) = \frac{2}{3}\,(x_0^{-1/3}, y_0^{-1/3}, z_0^{-1/3}).$$

Como dicho vector es perpendicular a la superficie, la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto citado es

$$x_0^{-1/3}(x - x_0) + y_0^{-1/3}(y - y_0) + z_0^{-1/3}(z - z_0) = 0,$$

donde $x_0^{2/3} + y_0^{2/3} + z_0^{2/3} = a^{2/3}$ (pues el punto pertenece a la superficie).

Los puntos de intersección de este plano con los ejes coordenados son

$$(x_0^{1/3}a^{2/3}, 0, 0), \quad (0, y_0^{1/3}a^{2/3}, 0), \quad (0, 0, z_0^{1/3}a^{2/3}).$$

La suma de los cuadrados de dichas intersecciones vale:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^{4/3}(x_0^{2/3} + y_0^{2/3} + z_0^{2/3}) = a^2,$$

resultado que no depende del punto de tangencia.

PROBLEMA 3.38

Probar que toda recta normal al cono $x^2 = 2y^2 + 2z^2$ corta al eje X.

Solución

Calculamos en primer lugar el vector gradiente de la función de tres variables $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 - 2z^2$:

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (2x, -4y, -4z).$$

El vector $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0, z_0)$ es el vector director de la recta normal al cono en un punto (x_0, y_0, z_0). La ecuación de la recta se escribe entonces como

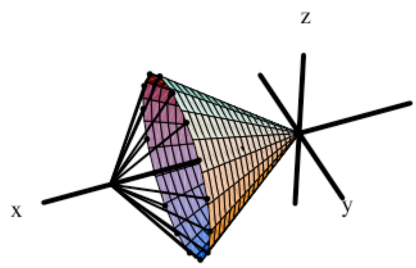
$$\frac{x - x_0}{2x_0} = \frac{y - y_0}{-4y_0} = \frac{z - z_0}{-4z_0}.$$

Para que dicha recta corte al eje X, debe ser compatible el sistema

$$\begin{array}{l} \frac{x-x_0}{2x_0} = \frac{-y_0}{-4y_0} \\ \frac{x-x_0}{2x_0} = \frac{-z_0}{-4z_0} \end{array}$$

que resulta de hacer $y = 0$ y $z = 0$.

En efecto, ambas ecuaciones dan la misma solución $x = 3x_0/2$, lo que prueba que la recta corta al eje X en el punto $(3x_0/2, 0, 0)$.



En la gráfica se muestran algunas rectas normales al cono en puntos de la circunferencia $x_0^2 = 2y^2 + 2z^2$, $x = x_0$ y se observa que todas ellas cortan al eje X en el punto $(3x_0/2, 0, 0)$.

4. DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS.

Las reglas de derivación para la suma, resta, producto y cociente de funciones de una variable se extienden sin hipótesis adicionales al caso de funciones de varias variables.

El siguiente resultado general especifica las condiciones para la diferenciabilidad de una función compuesta.

Regla de la cadena. *Sean* $g : \Delta \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *diferenciable en* $\overrightarrow{x_0} \in \operatorname{int} \Delta$ *y* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *diferenciable en* $\overrightarrow{y_0} = g(\overrightarrow{x_0}) \in \operatorname{int} D$. *Entonces* $f \circ g$ *es diferenciable en* $\overrightarrow{x_0}$ *y*

$$d(f \circ g)(\overrightarrow{x_0}) = df(\overrightarrow{y_0}) \circ dg(\overrightarrow{x_0}).$$

Como la matriz asociada a la composición de aplicaciones lineales es el producto de las matrices asociadas a cada una de las funciones, de la fórmula anterior deducimos la llamada <u>forma matricial de la regla de la cadena</u>:

$$D(f \circ g)(\overrightarrow{x_0}) = Df\big(\overrightarrow{g(x_0)}\big) \cdot Dg(\overrightarrow{x_0}).$$

Desarrollando el producto de estas matrices, podemos expresar el elemento de la fila j-ésima y columna i-ésima de la matriz $D(f \circ g)$ como:

$$D_i(f \circ g)_j(\overrightarrow{x_0}) = \sum_{k=1}^{n} D_k f_j\big(\overrightarrow{g(x_0)}\big) \cdot D_i g_k(\overrightarrow{x_0}),\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le p,$$

es decir,

$$\frac{\partial (f \circ g)_j}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j\big(\overrightarrow{g(x_0)}\big)}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial g_k(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_i},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le p.$$

Escribimos a continuación algunos casos particulares.

Caso de una sola variable dependiente.

(a) $p = 1$, $m > 1$:

Si $z = f(y_1, \dots, y_n)$ es una función diferenciable de los argumentos $y_1, \dots, y_n$, que son a su vez funciones diferenciables de las m variables independientes $x_1, \dots, x_m$,

$$y_i = g_i(x_1, \dots, x_m),\ 1 \le i \le n,$$

las derivadas parciales de la función compuesta se calculan con la fórmula:

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_k}(\overrightarrow{x_0}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}\big(\overrightarrow{g(x_0)}\big) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\overrightarrow{x_0}),\ 1 \le k \le m.$$

Veamos un ejemplo concreto bastante común:

Si z es una función compuesta de varias variables independientes, por ejemplo $z = f(u, v)$, donde $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ (x e y son variables independientes), ϕ y ψ son funciones diferenciables, las derivadas parciales de z con respecto a x e y se expresan así:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}$$

(b) $p = 1$, $m = 1$: Si $z = f(y_1, \ldots, y_n)$ es una función diferenciable de los argumentos $y_1, \ldots, y_n$, que son a su vez funciones diferenciables de una variable independiente x,

$$y_i = g_i(x),\ 1 \le i \le n,$$

la derivada de la función compuesta se puede calcular por la fórmula:

$$(f \circ g)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}\big(\overrightarrow{g(x_0)}\big) \cdot g_i'(x_0) = \overrightarrow{\nabla} f\big(\overrightarrow{g(x_0)}\big) \cdot Dg(x_0).$$

En el caso particular de que x coincida con uno de los argumentos, por ejemplo con y_k, la derivada total de la función f con respecto a x será:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_i}{dx}.$$

PROBLEMA 3.39

Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, si $z = f(u, v)$, $u = e^{xy}$, $v = x^2 - y^2$.

Solución

Basta aplicar directamente la regla de derivación de una función compuesta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot ye^{xy} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2x \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot xe^{xy} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2y.\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.40

Sea $w = f(u, v)$ con $u(x, y, z) = x/y$, $v(x, y, z) = y/z$. Calcular $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, $\dfrac{\partial w}{\partial z}$.

Solución

Procedemos de forma completamente análoga al problema anterior:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{1}{y}\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{-x}{y^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{z}\\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{-y}{z^2}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.41

Dadas las funciones $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$, $g(x) = (x, x)$, estudiar la diferenciabilidad de la función compuesta $f \circ g$.

Solución

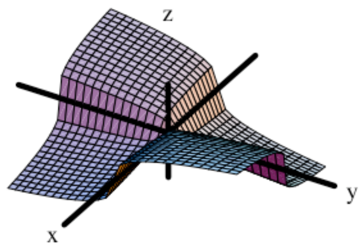
Por definición,

$$(f \circ g)(x) = f(x, x) = x^{2/3},$$

la cual es una función de una variable que sabemos no es diferenciable en el origen. Observemos sin embargo que existen las derivadas parciales de f en el origen,

$$\begin{aligned}
f'_x(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,\\
f'_y(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0,
\end{aligned}$$

y que la función g es derivable en $x = 0$.



Este ejemplo prueba que la existencia de derivadas parciales no es condición suficiente para que sea válida la regla de la cadena.

PROBLEMA 3.42

Siendo $z = \ln(x/y) - \operatorname{arc\,sen}(y/x)$, $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{-2t} + 1$, hallar la derivada dz/dt.

Solución

Las derivadas parciales de z son, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1/y}{x/y} - \frac{-y/x^2}{\sqrt{1-y^2/x^2}} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}};\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-x/y^2}{x/y} - \frac{1/x}{\sqrt{1-y^2/x^2}} = -\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.
\end{aligned}$$

Por la regla de derivación de la función compuesta tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\\
&= 2e^{2t}\left[\frac{1}{x} + \frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}\right] + 2e^{-2t}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right].
\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.43

Calcular $\dfrac{d(f \circ h)}{du}$ en los siguientes casos:

(a) $f(x, y) = e^{xy}\cos(xy^2)$, $h(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u)$.

(b) $f(x, y, z) = xz + yz + xy$, $h(u) = (e^u, \cos u, \operatorname{sen} u)$, cuando $u = 1$.

Solución

(a) Por la fórmula de la derivada de la función compuesta, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d(f \circ h)}{du} &= Df(x, y) \cdot h'(u) \\
&= \big(ye^{xy}\cos(xy^2) - y^2e^{xy}\operatorname{sen}(xy^2), xe^{xy}\cos(xy^2) - 2xye^{xy}\operatorname{sen}(xy^2)\big) \\
&\qquad \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} u \\ \cos u \end{pmatrix} \\
&= -ye^{xy}\cos(xy^2)\operatorname{sen} u + y^2e^{xy}\operatorname{sen}(xy^2)\operatorname{sen} u \\
&\qquad +xe^{xy}\cos(xy^2)\cos u - 2xye^{xy}\operatorname{sen}(xy^2)\cos u \\
&= (x^2 - y^2)e^{xy}\cos(xy^2) + y(y^2 - 2x^2)e^{xy}\operatorname{sen}(xy^2)
\end{aligned}$$

(observemos que $x = \cos u$, $y = \operatorname{sen} u$).

(b) Cuando $u = 1$, $h(1) = (x(1), y(1), z(1)) = (e, \cos 1, \operatorname{sen} 1)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d(f \circ h)}{du} &= Df(x, y, z) \cdot h'(u) = (z + y, z + x, x + y) \cdot \begin{pmatrix} e^u \\ -\operatorname{sen} u \\ \cos u \end{pmatrix} \\
&= (z + y)e^u - (z + x)\operatorname{sen} u + (x + y)\cos u. \\
\Longrightarrow \frac{d(f \circ h)}{du}(1) &= e \cdot (\operatorname{sen} 1 + \cos 1) - (e + \operatorname{sen} 1) \cdot \operatorname{sen} 1 + (e + \cos 1) \cdot \cos 1 \\
&= 2e\cos 1 + \cos 2.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.44

Se consideran las funciones

$$f(t) = (t, t^2, e^t) \text{ y } g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Calcular las derivadas de las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución

(a) Como $g \circ f$ es una función real de una variable real, si llamamos $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = e^t$, su derivada es

$$(g \circ f)'(t) = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot y'(t) + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot z'(t) = 2x + 4yt + 2ze^t = 2t + 4t^3 + 2e^{2t}.$$

(b) En este caso, tenemos $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Por tanto, si llamamos $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$ y $f_3(t) = e^t$ a las componentes de la función f, su matriz jacobiana se obtiene con el siguiente producto:

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(x, y, z) &= \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_x g & D_y g & D_z g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4xt & 4yt & 4zt \\ 2xe^t & 2ye^t & 2ze^t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $t = x^2 + y^2 + z^2$.

PROBLEMA 3.45

Sean f y g las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \big(e^{x+2y}, \operatorname{sen}(y + 2x)\big), \\ g(u, v, w) &= (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2). \end{aligned}$$

Calcular $D(f \circ g)(1, -1, 1)$.

Solución

Calculamos por separado las derivadas de ambas funciones:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2\cos(y + 2x) & \cos(y + 2x) \end{pmatrix}, \quad Dg(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & 4v & 9w^2 \\ -2u & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $g(1, -1, 1) = (6, -3)$, si aplicamos la regla de la cadena, obtenemos:

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(1, -1, 1) &= Df(6, -3) \cdot Dg(1, -1, 1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2\cos 9 & \cos 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 0 & -6\cos 9 & 18\cos 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3.46

Demostrar que la función $z = \phi(x^2 + y^2)$ satisface la ecuación $y\,\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Solución

Si llamamos $t = x^2+y^2$, la función ϕ depende de x e y a través del argumento intermedio t, por lo cual

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{dz}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \phi'(x^2+y^2)\cdot 2x\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{dz}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \phi'(x^2+y^2)\cdot 2y,\end{aligned}$$

de donde efectivamente

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y\phi'(x^2+y^2)\cdot 2x - x\phi'(x^2+y^2)\cdot 2y = 0.$$

PROBLEMA 3.47

Si $u(x,y,z) = x^n\cdot\varphi(y/x^\alpha, z/x^\beta)$, donde φ es una función diferenciable, comprobar que

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \beta z\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = n\cdot u.$$

Solución

Utilizaremos las variables auxiliares $v = y/x^\alpha$, $w = z/x^\beta$. Por la regla de la cadena y la fórmula de la derivada del producto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= nx^{n-1}\cdot\varphi(v,w) + x^n\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ &= nx^{n-1}\cdot\varphi(v,w) - \alpha y x^{n-\alpha-1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \beta z x^{n-\beta-1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w},\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x^n\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right) = x^{n-\alpha}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v},\\ \frac{\partial u}{\partial z} &= x^n\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right) = x^{n-\beta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}.\end{aligned}$$

Con estos datos, basta sustituir en la expresión que se indica en el enunciado para obtener la igualdad propuesta.

PROBLEMA 3.48

Si $z = \dfrac{f(x-y)}{y}$, probar que $z + y\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Solución

Si llamamos $u = x - y$, las derivadas parciales de z son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{y} \cdot f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot f'(x-y); \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{y \cdot f'(u) \cdot (\partial u/\partial y) - f(u)}{y^2} = \frac{-yf'(x-y) - f(x-y)}{y^2}. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-f(x-y)}{y^2} = \dfrac{-z}{y}$, lo que equivale a la igualdad buscada.

PROBLEMA 3.49

Dada la función $u(x,y) = xyf\Big(\dfrac{x+y}{xy}\Big)$, siendo f arbitraria, demostrar que $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = (x-y) \cdot u$.

Solución

Aplicamos la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales. Si utilizamos la variable auxiliar $z = \dfrac{x+y}{xy}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= yf(z) + xyf'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = yf(z) + xyf'(z) \cdot \frac{xy - y(x+y)}{x^2y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= xf(z) + xyf'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xf(z) + xyf'(z) \cdot \frac{xy - x(x+y)}{x^2y^2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
x^2\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} &= x^2yf(z) - xy^2f(z) - xyf'(z) + xyf'(z) \\
&= (x-y)\cdot xy\cdot f(z) = (x-y)\cdot u.
\end{aligned}
$$

PROBLEMA 3.50

Sea $\Omega = f(u,v,w)$ una función diferenciable, con

$$u^3 = x^3 + y^3 + z^3, v^2 = x^2 + y^2 + z^2, w = x + y + z.$$

Demostrar que

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} + z\,\frac{\partial f}{\partial z} = u\,\frac{\partial f}{\partial u} + v\,\frac{\partial f}{\partial v} + w\,\frac{\partial f}{\partial w}.$$

Solución

Calculamos las derivadas parciales de f aplicando la regla de la cadena. Teniendo en cuenta que

$$u = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3},\ v = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ w = x+y+z,$$

obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3+y^3+z^3)^2}}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2}{3\sqrt[3]{(x^3+y^3+z^3)^2}}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3z^2}{3\sqrt[3]{(x^3+y^3+z^3)^2}},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial w}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial w}{\partial z} = 1.$$

Resulta así:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{3x^2}{3u^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{2x}{2v} + \frac{\partial f}{\partial w} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{3y^2}{3u^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{2y}{2v} + \frac{\partial f}{\partial w} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{3z^2}{3u^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{2z}{2v} + \frac{\partial f}{\partial w}.
\end{aligned}
$$

Basta ahora sustituir este resultado en la expresión $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$ y obtener directamente $u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v} + w\frac{\partial f}{\partial w}$.

PROBLEMA 3.51

Una función $z = f(x_1, \dots, x_n)$ se dice <u>homogénea de grado p</u> si

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, \dots, x_n),$$

para todo punto $(x_1, \dots, x_n) \in D$ y todo $\lambda > 0$ tales que $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in D$. Probar el teorema de Euler sobre funciones homogéneas:

Una función $z = f(x_1, \dots, x_n)$ es homogénea de grado p si y sólo si $$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = pz.$$

Solución

Por simplicidad en la notación supondremos $n = 2$. Probaremos en primer lugar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = pf(x, y)$, si f es homogénea de grado p.

Si llamamos $u = \lambda x,\ v = \lambda y$, por ser f homogénea podemos escribir

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(u, v) = \lambda^p f(x, y).$$

Si derivamos $f(u, v)$ respecto a λ, obtenemos:

$$\begin{aligned} p\lambda^{p-1} f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \lambda} \\ \Longrightarrow p\lambda^{p-1} f(x, y) &= x\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + y\frac{\partial f}{\partial v}(u, v). \end{aligned}$$

En particular, haciendo $\lambda = 1$, resulta $u = x,\ v = y$ y obtenemos la fórmula deseada.

Recíprocamente, si $xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = pf(x, y)$, definimos

$$\phi(\lambda) = \frac{f(\lambda x, \lambda y)}{\lambda^p},\ \lambda > 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \phi'(\lambda) &= \frac{\lambda^p[xf'_x(\lambda x, \lambda y) + yf'_y(\lambda x, \lambda y)] - p\lambda^{p-1} f(\lambda x, \lambda y)}{\lambda^{2p}} \\ &= \frac{\lambda x f'_x(\lambda x, \lambda y) + \lambda y f'_y(\lambda x, \lambda y) - pf(\lambda x, \lambda y)}{\lambda^{p+1}}. \end{aligned}$$

Si llamamos $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, entonces la hipótesis se puede escribir como

$$pf(x', y') = x' D_1 f(x', y') + y' D_2 f(x', y'),$$

o bien

$$pf(\lambda x, \lambda y) = \lambda x D_1 f(\lambda x, \lambda y) + \lambda y D_2 f(\lambda x, \lambda y).$$

Esto significa que $\phi'(\lambda) = 0$, y ϕ es una función constante. Entonces, $\forall \lambda > 0$, $\phi(\lambda) = \phi(1)$ y, debido a que $\phi(1) = f(x, y)$, deducimos que f es homogénea de grado p.

PROBLEMA 3.52

Ver si la función

$$f(x, y) = \frac{y^4 \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - x^2/y^2}}{x\sqrt{x^2 + y^2} - y\sqrt{x^2 - y^2}}$$

es homogénea y hallar su grado en caso afirmativo.

Solución

Si suponemos $\lambda > 0$, entonces

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{\lambda^4 y^4 \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - \lambda^2 x^2/\lambda^2 y^2}}{\lambda x\sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2)} - \lambda y\sqrt{\lambda^2(x^2 - y^2)}} \\ &= \frac{\lambda^4 y^4 \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - x^2/y^2}}{\lambda^2(x\sqrt{x^2 + y^2} - y\sqrt{x^2 - y^2})} = \lambda^2 f(x, y). \end{aligned}$$

Esto significa que la función es homogénea de grado 2.

PROBLEMA 3.53

Comprobar que $f(x, y) = \cos \dfrac{2x + y}{2x - y}$ *verifica la identidad*

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Solución

Puesto que
$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) = \lambda^0 f(x, y),$$
la función es homogénea de grado cero. La identidad buscada se deduce pues del teorema de Euler.

PROBLEMA 3.54

Dada la función
$$z = \frac{x^5 + y^5}{x + y} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + y}{x - y}\, e^{y/x},$$
hallar $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución

Si llamamos $f(x, y) = z$ entonces
$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^5(x^5 + y^5)}{\lambda(x + y)} \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda(x + y)}{\lambda(x - y)}\, e^{\lambda y/\lambda x} = \lambda^4 f(x, y),$$
lo que quiere decir que f es homogénea de grado 4. Por tanto,
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 4z.$$

PROBLEMA 3.55

Si la función $w = f\left[\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right]$ es diferenciable, comprobar que $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Solución

Si llamamos $u = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, entonces:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} = f'(u) \cdot \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \cdot \frac{x(x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = f'(u) \cdot \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Basta multiplicar la primera igualdad por x y la segunda por y para obtener la identidad propuesta.

Otro método consiste en observar que la función dada es homogénea de grado cero, por lo que basta aplicar el teorema de Euler demostrado en el problema 3.49.

PROBLEMA 3.56

Si $f(x,y)$ es una función homogénea de grado p, probar que la función $F(x,y) = f(f(x,y), f(x,y))$ es homogénea de grado p^2.

Solución

Aplicando repetidamente la hipótesis $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x,y)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} F(\lambda x, \lambda y) &= f(\lambda^p f(x,y), \lambda^p f(x,y)) = \lambda^p f(\lambda^{p-1} f(x,y), \lambda^{p-1} f(x,y)) \\ &= \lambda^{2p} f(\lambda^{p-2} f(x,y), \lambda^{p-2} f(x,y)) = \dots \\ &= \lambda^{p \cdot p} f(f(x,y), f(x,y)) = \lambda^{p^2} F(x,y), \end{aligned}$$

lo que demuestra que F es homogénea de grado p^2.

Otro método posible sería utilizar el teorema de Euler, lo cual proponemos como ejercicio.

PROBLEMA 3.57

Se considera la superficie dada por las ecuaciones

$$S : \begin{cases} F(u,v) = 0 \\ u = xy \\ v = \sqrt{x^2 + z^2}. \end{cases}$$

Hallar un vector normal a S en el punto $P(1, 1, \sqrt{3})$, sabiendo que $D_1F(1,2) = 1,\ D_2F(1,2) = 2$.

Solución

Si definimos la función $G(x,y,z) = F(xy, \sqrt{x^2 + z^2})$ (composición de F con la función $(u,v) = (xy, \sqrt{x^2 + z^2})$), la superficie dada es la superficie de nivel cero de la función G. Por tanto, un vector normal a la superficie en el punto P es el gradiente de G, $\overrightarrow{v} = \big(D_1G(P), D_2G(P), D_3G(P)\big)$. Aplicamos pues la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} D_1G(x,y,z) &= \frac{\partial F}{\partial u}\cdot y + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, \\ D_2G(x,y,z) &= \frac{\partial F}{\partial u}\cdot x + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot 0, \\ D_3G(x,y,z) &= \frac{\partial F}{\partial u}\cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en el punto $P(1,1,\sqrt{3})$, obtenemos:

$$\begin{aligned} D_1G(1,1,\sqrt{3}) &= \frac{\partial F}{\partial u}(1,2)\cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial v}(1,2)\cdot \frac{1}{2} = 2, \\ D_2G(1,1,\sqrt{3}) &= \frac{\partial F}{\partial u}(1,2)\cdot 1 = 1, \\ D_3G(1,1,\sqrt{3}) &= \frac{\partial F}{\partial v}(1,2)\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Un vector normal a la superficie es entonces $\overrightarrow{v} = (2,1,\sqrt{3})$.

PROBLEMA 3.58

Si una superficie tiene por ecuación $z = xf(x/y)$, con f diferenciable, demostrar que todos los planos tangentes tienen un punto en común.

Solución

Debido a que $\overrightarrow{\nabla z} = \Big(f(x/y) + \frac{x}{y}f'(x/y), -\frac{x^2}{y^2}f'(x/y)\Big)$, la ecuación del plano tangente en un punto arbitrario (x_0,y_0,z_0) de la superficie (es decir, donde $z_0 = x_0f(x_0/y_0)$), es la siguiente:

$$\begin{aligned} z - x_0\cdot f\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) &= \Big[f\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) + \frac{x_0}{y_0}\cdot f'\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big)\Big]\cdot(x-x_0) - \frac{x_0^2}{y_0^2}\cdot f'\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big)\cdot(y-y_0) \\ &= \Big[f\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) + \frac{x_0}{y_0}\cdot f'\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big)\Big]\cdot x - x_0\cdot f\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) - \frac{x_0^2}{y_0}\cdot f'\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) \\ &\quad -\frac{x_0^2}{y_0^2}\cdot f'\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big)\cdot y + \frac{x_0^2}{y_0}\cdot f'\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) \\ \Longrightarrow z &= \Big[f\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) + \frac{x_0}{y_0}\cdot f'\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big)\Big]\cdot x - \frac{x_0^2}{y_0^2}\cdot f'\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big)\cdot y, \end{aligned}$$

lo que significa que todos los planos tangentes pasan por el origen.

5. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

Dada $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, cada una de las derivadas parciales es, a su vez, una función $D_k f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(k = 1, \dots, m)$, definida en algún subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Estas funciones se llaman derivadas parciales de primer orden de f. A su vez, para cada una de ellas se pueden definir las correspondientes derivadas parciales, que llamaremos derivadas parciales de segundo orden de f, y para las que usaremos indistintamente cualquiera de las siguientes notaciones:

$$D_i(D_k f) = D_{ki} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = f_{ki},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le k \le m.$$

En el caso particular de $i = k$, utilizamos la notación análoga

$$(D_k)^2 f = D_{kk} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = f_{kk},\ (k = 1, \dots, m).$$

El proceso de derivación puede repetirse de forma sucesiva y de este modo definir las derivadas parciales de orden p de f como

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}$$

para cualquier permutación de los índices $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, m\}$.

Un problema interesante es averiguar bajo qué condiciones existen y son iguales las derivadas cruzadas (aquellas en donde sólo se cambia el orden de la permutación). La respuesta la proporciona el siguiente teorema de Schwarz.

Teorema (Igualdad de las derivadas parciales cruzadas.) *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, donde D es un conjunto abierto. Si existen las derivadas parciales de primer orden $\partial f / \partial x_k$, $\forall k \in \{1, \dots, m\}$, en alguna bola $B(\overrightarrow{x_0}, r) \subset D$ y existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ y es continua en $\overrightarrow{x_0}$, entonces existe también $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ y*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overrightarrow{x_0}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{x_0}).$$

Diremos que una función es de clase $C^{(p)}$ en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^m$, denotado como $f \in C^{(p)}(D)$, cuando existen y son continuas todas las derivadas parciales de orden p de f en D. En particular, $C^{(0)}$ es la clase de funciones continuas y $C^{(\infty)}$ representa la clase de funciones con derivadas continuas de cualquier orden. Así por ejemplo, como ya indicamos en la sección 2, una función de clase $C^{(1)}$ es diferenciable. Es fácil también probar que $C^{(p)}(D) \subset C^{(p-1)}(D)$, $\forall p > 0$.

Del teorema anterior, es evidente que, si $f \in C^{(2)}(D)$, entonces también se verifica la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

Análogamente, se prueba que, si $f \in C^{(k)}(D)$, son iguales todas las derivadas cruzadas de orden k, es decir

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{p(1)}} \dots \partial x_{i_{p(k)}}},$$

donde $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ y $\{p(1), \dots, p(k)\}$ es cualquier permutación de $\{i_1, \dots, i_k\}$.

PROBLEMA 3.59

Dada la función $f(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{k}{\sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n-2}}}$ $(k \in \mathbb{R})$, hallar el valor de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overrightarrow{x}) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overrightarrow{x}), \text{ con } \overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Solución

Para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$, las derivadas parciales de primer orden son:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x}) = \frac{-k \cdot \frac{n-2}{2} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{\frac{n-2}{2}-1} \cdot 2x_i}{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{n-2}} = -k(n-2) \cdot \frac{x_i}{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{n/2}}.$$

Derivando nuevamente, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\overrightarrow{x}) &= -k(n-2) \frac{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{n/2} - x_i(n/2)\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{(n/2)-1} \cdot 2x_i}{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^n} \\
&= -k(n-2) \left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{n/2} \frac{1 - nx_i^2 \left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{-1}}{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^n} \\
&= -k(n-2) \frac{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right] - nx_i^2}{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{(n/2)+1}} \\
&= -\frac{k(n-2)}{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{(n/2)+1}} \left[x_1^2 + \dots + (1-n)x_i^2 + \dots + x_n^2\right].
\end{aligned}$$

La suma pedida vale entonces

$$S = -\frac{k(n-2)}{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{(n/2)+1}} \left[(1-n)(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + (n-1)(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\right] = 0.$$

PROBLEMA 3.60

Dada la función $u = u(r,s)$ de clase $C^{(2)}$, si $x = 2r - s$, $y = r + 2s$, averiguar el valor de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ en función de las derivadas con respecto a r y s.

Solución

Despejando r y s en función de x e y, tenemos que $r = \dfrac{2x+y}{5}$, $s = \dfrac{2y-x}{5}$, luego $\partial r/\partial x = 2/5$, $\partial s/\partial x = -1/5$, $\partial r/\partial y = 1/5$, $\partial s/\partial y = 2/5$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
u_1 = \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{5} \cdot \frac{\partial u}{\partial s}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \\
&= \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r}\right) \cdot \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + \frac{2}{5} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) \cdot \frac{-1}{5} \\
&= \frac{1}{25}\left(2\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 3\,\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right),
\end{aligned}$$

pues, debido a que $u \in C^{(2)}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial s \partial r}$.

Dejamos como ejercicio comprobar que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

PROBLEMA 3.61

Dada $f(x,y) = y^n e^{-x^2/4y}$, hallar n para que se verifique

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Solución

Calculamos las derivadas parciales de la función:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-xy^{n-1}}{2}\cdot e^{-x^2/4y}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y^{n-1}e^{-x^2/4y}\Big(n+\frac{x^2}{4y}\Big).\end{aligned}$$

Como además

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left[\frac{-y^{n-1}}{2}+\frac{xy^{n-1}}{2}\cdot\frac{x}{2y}\right]\cdot e^{-x^2/4y}=y^{n-1}\cdot e^{-x^2/4y}\cdot\left[-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4y}\right],$$

deducimos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\,\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= 2x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+x^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\\ &= -x^2y^{n-1}\cdot e^{-x^2/4y}+x^2y^{n-1}\cdot e^{-x^2/4y}\cdot\left[-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4y}\right]\\ &= x^2y^{n-1}\cdot e^{-x^2/4y}\cdot\left[-\frac{3}{2}+\frac{x^2}{4y}\right].\end{aligned}$$

En definitiva, como

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\,\frac{\partial f}{\partial x}\right)=y^{n-1}e^{-x^2/4y}\Big(-\frac{3}{2}+\frac{x^2}{4y}\Big),$$

basta hacer $n=-3/2$ para obtener la igualdad propuesta.

PROBLEMA 3.62

Dada la función $u(x,y)=f(x-y)+g(x-y)$, donde f y g son funciones reales diferenciables, comprobar la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Solución

Por las reglas de derivación de funciones compuestas, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x-y)+g'(x-y) &\implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(x-y)+g''(x-y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-f'(x-y)-g'(x-y) &\implies \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(x-y)+g''(x-y).\end{aligned}$$

Es evidente pues la igualdad propuesta.

PROBLEMA 3.63

Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen}(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$, calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. ¿A qué se debe el resultado?

Solución

Las derivadas parciales de primer orden se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^2 \cdot \cos(x/y) \cdot (1/y) = y \cdot \cos(x/y) \qquad \text{si } y \neq 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y \cdot \operatorname{sen}(x/y) + y^2 \cdot \cos(x/y) \cdot (-x/y^2) \\
&= 2y \cdot \operatorname{sen}(x/y) - x \cdot \cos(x/y) \qquad \text{si } y \neq 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^2 \operatorname{sen}(x/k)}{k} = 0.
\end{aligned}$$

Con los resultados anteriores, calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k \cdot \cos 0 - 0}{k} = 1 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{k} = 0.
\end{aligned}$$

Las derivadas de segundo orden cruzadas no son iguales en este problema debido a que la función $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ no es continua en el origen (dejamos como ejercicio la comprobación de esta afirmación).

PROBLEMA 3.64

Sea $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(xy)$, donde $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$. Si llamamos k a la función compuesta $k(s,t) = f\big(g(s,t), h(s,t)\big)$, calcular $\dfrac{\partial^2 k}{\partial s \partial t}$.

Solución

Aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial k}{\partial s} = D_1 f \cdot \frac{\partial g}{\partial s} + D_2 f \cdot \frac{\partial h}{\partial s} = \big[e^x \operatorname{sen}(xy) + ye^x \cos(xy)\big] \cdot \frac{\partial g}{\partial s} + xe^x \cos(xy) \cdot \frac{\partial h}{\partial s}.$$

Denotaremos por comodidad $F_1(x,y) = D_1 f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(xy) + ye^x \cos(xy)$ y $F_2(x,y) = D_2 f(x,y) = xe^x \cos(xy)$. Si derivamos con respecto a t el resultado anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 k}{\partial s \partial t} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}\right) \cdot \frac{\partial g}{\partial s} + F_1(x,y) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t} \\
&\quad + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}\right) \cdot \frac{\partial h}{\partial s} + F_2(x,y) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} \\
&= \big[e^x \operatorname{sen}(xy) + 2ye^x \cos(xy) - y^2 e^x \operatorname{sen}(xy)\big] \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \frac{\partial g}{\partial s} \\
&\quad + [xe^x \cos(xy) + e^x \cos(xy) - xye^x \operatorname{sen}(xy)] \frac{\partial h}{\partial t} \cdot \frac{\partial g}{\partial s} \\
&\quad + [e^x \cos(xy) + xe^x \cos(xy) - xye^x \operatorname{sen}(xy)] \cdot \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \frac{\partial h}{\partial s} \\
&\quad - x^2 e^x \operatorname{sen}(xy) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cdot \frac{\partial h}{\partial s} \\
&\quad + \big[e^x \operatorname{sen}(xy) + ye^x \cos(xy)\big] \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t} + xe^x \cos(xy) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.65

Sea f una función homogénea de grado p. Probar que

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = p(p-1)f.$$

Solución

A partir de la fórmula de Euler

$$xD_1f + yD_2f = pf,$$

calculamos las derivadas parciales y obtenemos:

$$\begin{aligned} xD_{11}f + D_1f + yD_{21}f &= pD_1f \\ xD_{12}f + D_2f + yD_{22}f &= pD_2f. \end{aligned}$$

Multiplicamos la primera igualdad por x y la segunda por y, y sumamos ambas expresiones. Se obtiene así:

$$\begin{aligned} x^2D_{11}f + xD_1f + 2xyD_{12}f + yD_2f + y^2D_{22}f &= pxD_1f + pyD_2f \\ \Longrightarrow x^2D_{11}f + 2xyD_{12}f + y^2D_{22}f &= x(p-1)D_1f + y(p-1)D_2f \\ &= (p-1)\cdot p\cdot f, \end{aligned}$$

después de aplicar nuevamente la fórmula de Euler.

PROBLEMA 3.66

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones con derivadas segundas continuas. Definimos $F(x,y) = f\big(x + g(y)\big)$. Verificar si es cierta la igualdad

$$D_1F \cdot D_{12}F = D_2F \cdot D_{11}F.$$

Solución

Definimos la variable auxiliar $u = x + g(y)$. Por las reglas de derivación de la función compuesta, tenemos:

$$\begin{aligned} D_1F &= f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u),\ D_2F = f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)\cdot g'(y); \\ D_{11}F &= f''(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = f''(u),\ D_{12}F = f''(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = f''(u)\cdot g'(y). \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que la igualdad propuesta es cierta.

PROBLEMA 3.67

Si f y g son funciones reales de una variable real que tienen derivadas de orden 2 continuas, se define

$$y(x,t) = f(x+at) + g(x-at).$$

Probar que y verifica la "ecuación de la cuerda vibrante"

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Solución

Utilizando las variables auxiliares $u = x + at$, $v = x - at$, podemos escribir $y = f(u) + g(v)$. Las derivadas parciales valen entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = af'(u) - ag'(v);\\
\frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'(u) + g'(v).
\end{aligned}$$

Derivando por segunda vez, si denotamos por $y_1 = \partial y/\partial t$ e $y_2 = \partial y/\partial x$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial y_1}{\partial t} = \frac{\partial y_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 f''(u) + a^2 g''(v);\\
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f''(u) + g''(v).
\end{aligned}$$

Del resultado anterior se deduce de forma inmediata la ecuación propuesta.

PROBLEMA 3.68

Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales de primer orden y diferenciabilidad de la misma. Comprobar además que $D_{12}f(0,0) \neq D_{21}f(0,0)$.

Solución

(a) Teniendo en cuenta que $-(x^2+y^2) \le 2xy \le x^2+y^2$, deducimos que

$$0 \le \left| xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \le \left| \frac{x^2-y^2}{2} \right| \le \frac{|x^2|+|y^2|}{2}.$$

Debido a que el límite de las funciones en ambos extremos de la desigualdad es cero cuando $(x,y) \to (0,0)$, también debe ser cero el límite de $f(x,y)$. Esto prueba la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

(b) Por definición,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que existen ambas derivadas parciales de primer orden.

(c) Para que la función sea diferenciable en el origen, debe anularse el límite

$$\begin{aligned} L &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-x\cdot f'_x(0,0)-y\cdot f'_y(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy(x^2-y^2)|}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Aplicaremos la acotación ya utilizada en el apartado (a) $|xy| \le x^2+y^2$ y las siguientes desigualdades:

$$0 \le \frac{|xy(x^2-y^2)|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \le \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^{1/2}} \le \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, entonces $L=0$ y la función es diferenciable.

(d) Las derivadas de primer orden en un punto distinto del origen son:

$$\begin{aligned} D_1f(x,y) &= \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} \implies D_1f(0,k) = -k; \\ D_2f(x,y) &= \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} \implies D_2f(h,0) = h. \end{aligned}$$

Aplicamos ahora la definición para calcular las derivadas de segundo orden en el origen. Recordando además el resultado del apartado (b), resulta:

$$\begin{aligned} D_{12}f(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{D_1f(0,k) - D_1f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k}{k} = -1, \\ D_{21}f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{D_2f(h,0) - D_2f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1, \end{aligned}$$

y se deduce que, efectivamente, $D_{12}f(0,0) \neq D_{21}f(0,0)$.

Como sabemos, esto es debido a que alguna de las derivadas cruzadas de segundo orden no es continua en el origen.

PROBLEMA 3.69

Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = \big(f(x,y), g(x,y)\big)$, donde

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \cdot \operatorname{sen}(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

y g es diferenciable en el origen. Supongamos además que $g(0,0) = 0$, $D_{\vec{u}}g(0,0) = 1$ y $D_{\vec{v}}g(0,0) = 0$, siendo $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ los vectores $(1,1)$ y $(-1,1)$, respectivamente. Se pide:

(a) Calcular $\overrightarrow{\nabla} g(0,0)$.

(b) Estudiar la diferenciabilidad de F en $(0,0)$.

(c) Calcular $dF(0,0)$.

(d) Probar que $D_{12}f(0,0) \neq D_{21}f(0,0)$.

Solución

(a) Por definición,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}g(0,0) &= \overrightarrow{\nabla} g(0,0) \cdot \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\Big) = 1, \\ D_{\vec{v}}g(0,0) &= \overrightarrow{\nabla} g(0,0) \cdot \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Big(-\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\Big) = 0. \end{aligned}$$

Al resolver el sistema, se obtiene la solución

$$\overrightarrow{\nabla} g(0,0) = \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(0,0), \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\Big) = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big).$$

(b) La función F es diferenciable en el origen si y sólo si lo son las funciones f y g. Esta última lo es por hipótesis y comprobaremos que f tiene derivadas parciales de primer orden continuas en $(0,0)$. Utilizando la definición de derivada parcial y las reglas usuales de derivación, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\cos(x/y) \qquad \text{si } y \neq 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = 0; \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\,\text{sen}(x/y) - x\cos(x/y) \qquad \text{si } y \neq 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} k\,\text{sen}(x/k) = 0.
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que, tanto $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ como $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, son continuas en el origen.

(c) Por definición, $dF(0,0) = (df(0,0), dg(0,0))$. Utilizando los resultados de los apartados (a) y (b), obtenemos:

$$\begin{aligned}
df(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot dy = 0, \\
dg(0,0) &= \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\cdot dx + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\cdot dy = (\sqrt{2}/2)\cdot(dx+dy).
\end{aligned}$$

(d) Por definición,

$$\begin{aligned}
D_{12}f(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{D_1f(0,k)-D_1f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k-0}{k} = 1, \\
D_{21}f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{D_2f(h,0)-D_2f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,
\end{aligned}$$

lo que prueba el enunciado.

6. FÓRMULA DE TAYLOR.

Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $\overrightarrow{x_0}$. Por definición de diferenciabilidad, podemos escribir

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) + Df(\overrightarrow{x_0}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}) + R_1(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_0}),$$

donde $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_1(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_0})}{\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\|} = 0$ y, si llamamos $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0} = (h_1, \dots, h_m)$, podemos escribir

$$Df(\overrightarrow{x_0}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0}) \cdot h_i.$$

La fórmula

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0}) \cdot h_i + R_1(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_0}),$$

recibe el nombre de <u>*fórmula de Taylor de primer orden*</u> de la función f en el punto $\overrightarrow{x_0}$.

Una extensión de esta fórmula puede obtenerse mediante derivadas de orden superior. En particular, si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^{(2)}$ en un punto $\overrightarrow{x_0}$ (lo que significa que existen y son continuas las derivadas parciales de segundo orden de la función en dicho punto), entonces la <u>*fórmula de Taylor de segundo orden*</u> de la función f en el punto $\overrightarrow{x_0}$ es la siguiente:

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0}) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{x_0}) \cdot h_i \cdot h_j + R_2(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_0}),$$

con $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_2(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_0})}{\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\|^2} = 0$ y $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0} = (h_1, \dots, h_m)$.

Una fórmula explícita para el error puede obtenerse en el caso de que la función sea de clase $C^{(3)}$ en un entorno del punto $\overrightarrow{x_0}$; en concreto,

$$R_2(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_0}) = \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\overrightarrow{c}) \cdot h_i \cdot h_j \cdot h_k,$$

donde $\overrightarrow{c}$ es algún punto contenido en el segmento que une $\overrightarrow{x_0}$ con $\overrightarrow{x}$.

Si definimos la <u>*matriz hessiana*</u> de f en el punto $\overrightarrow{x_0}$ como

$$Hf(\overrightarrow{x_0}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,m},$$

la fórmula de Taylor de segundo orden se puede escribir como

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) + \overrightarrow{\nabla f}(x_0) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}) \cdot Hf(\overrightarrow{x_0}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0})^T + R_2(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_0}),$$

donde denotamos por $(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0})^T$ a la matriz columna formada por las componentes del vector $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}$.

PROBLEMA 3.70

Escribir el desarrollo de Taylor de segundo orden de las funciones:

(a) $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ en el punto $(-2, 1)$.

(b) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cdot \cos(x + y)$ en el punto $(0, 0)$.

(c) $f(x, y) = x^y$ en el punto $(1, 1)$.

(d) $f(x, y) = e^{x+y}$ en el punto $(0, 0)$.

Solución

Calcularemos en todos los casos el vector gradiente y la matriz hessiana en el punto correspondiente.

(a) Si $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, entonces $f(-2, 1) = 1$. Además,

$$\left.\begin{array}{r} D_1 f(x, y) = -2x + 2y - 6 \\ D_2 f(x, y) = 2x + 6y - 2 \end{array}\right\} \implies \overrightarrow{\nabla f}(-2, 1) = (0, 0);$$

$$\left.\begin{array}{r} D_{11} f(x, y) = -2,\ D_{12} f(x, y) = 2, \\ D_{21} f(x, y) = 2,\ D_{22} f(x, y) = 6 \end{array}\right\} \implies Hf(-2, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(-2, 1) + (0, 0) \cdot (x + 2, y - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x + 2, y - 1) \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 1 \end{pmatrix} + R_2(x, y) \\ &= 1 - (x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 1) + 3(y - 1)^2 + R_2(x, y). \end{aligned}$$

Observemos en este caso que $R_2(x, y) = 0$, es decir el polinomio de Taylor de segundo orden coincide con la función al ser ésta ya un polinomio de segundo grado.

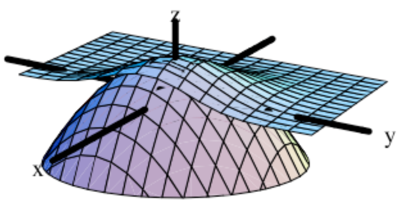
(b) Como $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \cdot \cos(x+y)$, entonces $f(0,0) = 1$. Por otra parte,

$$\left.\begin{array}{l} D_1 f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\big(-2x\cos(x+y) - \operatorname{sen}(x+y)\big) \\ D_2 f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\big(-2y\cos(x+y) - \operatorname{sen}(x+y)\big) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} f(0,0) = (0,0).$$

Como además $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, la fórmula de Taylor nos da la igualdad

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{2} \cdot (x,y) \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R_2(x,y) \\ &= 1 - \frac{3}{2}\, x^2 - xy - \frac{3}{2}\, y^2 + R_2(x,y). \end{aligned}$$

En la gráfica se observa el grado de aproximación en un entorno del origen de la superficie que representa la función (por encima) y la gráfica del polinomio de segundo grado que representa el polinomio de Taylor de segundo orden (por debajo).



(c) De $f(x,y) = x^y$, deducimos que $f(1,1) = 1$. Además,

$$\left.\begin{array}{r} D_1 f(x,y) = y x^{y-1} \\ D_2 f(x,y) = x^y \ln x \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} f(1,1) = (1,0);$$

$$\left.\begin{array}{c} D_{11} f(x,y) = y(y-1)x^{y-2} \\ D_{12} f(x,y) = x^{y-1}(1 + y\ln x) \\ D_{21} f(x,y) = x^{y-1}(1 + y\ln x)\ D_{22} f(x,y) = x^y (\ln x)^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la fórmula de Taylor, obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,1) + (1,0) \cdot (x-1, y-1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot (x-1, y-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + R_2(x,y) \\ &= 1 - y + xy + R_2(x,y). \end{aligned}$$

(d) Como $f(x,y)=e^{x+y}$, $f(0,0)=1$. Por otra parte,

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y)=\left(e^{x+y},e^{x+y}\right) \implies \overrightarrow{\nabla} f(0,0)=(1,1);$$
$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y}\end{pmatrix} \implies Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Obtenemos entonces que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0)+(1,1)\cdot(x,y)+\frac{1}{2}\cdot(x,y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}+R_2(x,y) \\ &= 1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2}+R_2(x,y). \end{aligned}$$

PROBLEMA 3.71

Sea la función

$$f(x,y)=e^{ax+y^2}+b\cdot \operatorname{sen}(x^2+y^2).$$

Determinar los valores de a y b para que el plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en el origen sea horizontal y el polinomio de Taylor de segundo orden centrado en el origen tome el valor 6 en el punto $(1,2)$.

Solución

Para que el plano tangente sea horizontal, deben anularse las dos derivadas parciales de primer orden. Así pues, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= ae^{ax+y^2}+2bx\cos(x^2+y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2ye^{ax+y^2}+2by\cos(x^2+y^2), \end{aligned}$$

deducimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=a \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Basta hacer $a=0$ para que ambas derivadas parciales se anulen.

Sustituyendo en la función, resulta

$$f(x,y)=e^{y^2}+b\operatorname{sen}(x^2+y^2).$$

Para escribir el polinomio de Taylor, calculemos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2b\cos(x^2+y^2) - 4bx^2\operatorname{sen}(x^2+y^2),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= -4bxy\operatorname{sen}(x^2+y^2),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (2+4y^2)e^{y^2} + 2b\cos(x^2+y^2) - 4by^2\operatorname{sen}(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en el punto $(0,0)$, obtenemos la matriz hessiana

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 2+2b \end{pmatrix}.$$

El polinomio de Taylor en el origen tiene la forma

$$P_2f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{2}\,(x,y)\cdot Hf(0,0)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 + bx^2 + (1+b)y^2.$$

Teniendo en cuenta el enunciado del problema, hacemos $6 = P_2f(1,2)$. Resulta así:

$$6 = 1 + b + 4(1+b) \Longrightarrow b = 1/5.$$

7. PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

(b) $f(x,y)=x^{(y^2)}$.

(c) $f(x,y)=\ln\big(\operatorname{sen}(y/x)\big)$.

(d) $f(x,y,z)=e^{xyz}\operatorname{sen}(xy)\cos(2xz)$.

2.- Comprobar las siguientes igualdades para las funciones que se indican:

(a) $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ si $z=\ln(y/x)$.

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$ si $u=x+\dfrac{x-y}{y-z}$.

(c) $x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=z$ si $z=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$.

3.- Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases} x/y & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0,\end{cases}$$

calcular sus derivadas direccionales en el origen y comprobar que f no es continua en el origen.

4.- Calcular las derivadas direccionales de la función

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } xy=0\\ 1 & \text{si } xy\neq 0\end{cases}$$

en el origen.

5.- Estudiar la continuidad y la existencia de derivadas direccionales de la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0,\end{cases}$$

en el origen.

6.- Se define una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) ¿El dominio de la función es abierto o cerrado?

(b) Determinar si f es continua o no en el origen.

(c) Calcular $f'(\overrightarrow{O}, \overrightarrow{y})$, donde $\overrightarrow{O} = (0,0)$, $\overrightarrow{y} = (a,b)$ es un vector unitario cualquiera, y deducir las derivadas parciales en el origen.

7.- Calcular las derivadas parciales en el punto $(0,0)$ y estudiar la diferenciabilidad de la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

8.- Sea $f(x,y) = (x^2+y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$. Probar que f es diferenciable y, sin embargo, f'_x no es continua en $(0,0)$.

9.- Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales de primer orden y diferenciabilidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en el punto $(0,0)$.

10.- Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+(y+1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,-1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,-1). \end{cases}$$

11.- Sea $f(x,y) = x^2 - 3x + |ay|$, con $a \in \mathbb{R}$.

(a) ¿Para qué valores de a es f continua en $(1,0)$?

(b) ¿Para qué valores de a es f diferenciable en $(1,0)$?

12.- Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^a y^b}{x^4+x^2y^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

siendo a y b números reales positivos, se pide:

(a) Hallar las condiciones para que $f(x,y)$ sea continua en el punto $(0,0)$.

(b) Si $a=3$, $b=2$, ¿es f diferenciable en $(0,0)$?

13.- Estudiar la diferenciabilidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\big(e^{x+y},\operatorname{sen}(x-y),x^2\operatorname{sen}(1/x)\big) & \text{si } x\neq 0\\ (e^y,-\operatorname{sen} y,0) & \text{si } x=0.\end{cases}$$

14.- Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función con las siguientes características:

i) f es diferenciable en (x_0,y_0).

ii) $df_{(x_0,y_0)}(3,2)=5$.

iii) $D_xf(x_0,y_0)=D_yf(x_0,y_0)$.

Calcular $D_xf(x_0,y_0)$.

15.- Sabiendo que la derivada direccional de la función $z=f(x,y)$ en el punto $(1,2)$ en la dirección hacia el punto $(2,3)$ es $2\sqrt{2}$ y en la dirección hacia $(1,0)$ es -3, ¿cuánto vale en dirección al origen?

16.- Hallar la derivada direccional de la función que se indica en el punto dado y según la dirección del vector $(\cos\beta,\operatorname{sen}\beta)$. Hallar también el valor de β para que la derivada sea máxima en ese punto.

(a) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}(x/y),\ P=(3,4)$.

(b) $f(x,y)=e^x\operatorname{sen} y,\ P=(0,\pi/6)$.

(c) $f(x,y)=\operatorname{sen}(xy),\ P=(2,\pi/4)$.

17.- Hallar la dirección en la que la derivada direccional de la función

$$z=e^{-y}\operatorname{sen} x+\frac{1}{3}e^{-3y}\operatorname{sen}(3x)$$

en el origen alcanza el valor máximo.

18.- ¿En qué dirección se debe mover un punto que parte de $(1,1,16)$ para que la función $f(x,y)=(x+y-2)^2+(3x-y-6)^2$ disminuya del modo más rápido posible?

19.- Hallar la derivada direccional de la función

$$f(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x$$

en el punto $P = (2, 1, 0)$ según la dirección del vector $\overrightarrow{PP'}$, donde $P' = (1, 4, 2)$. Además hallar el valor de dicha derivada en P según la dirección del vector $\overrightarrow{v}$, donde $\overrightarrow{v}$ es un vector unitario tal que $D_{\vec{v}} f$ es un máximo.

20.- La temperatura T de una placa de metal en un punto (x, y) es inversamente proporcional a la distancia al origen. Si suponemos que en el punto $P(3, 4)$ la temperatura es $100°C$, calcular la razón de cambio de T en P en la dirección del vector $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. ¿En qué dirección aumenta más rápidamente T en P? ¿En qué dirección se anula la tasa de variación?

21.- Hallar $F'(y)$ sabiendo que $F(y) = \displaystyle\int_y^{y^2} e^{-x^2 y}\, dx$.

22.- Sabiendo que $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$, calcular $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$.

23.- Hallar el vector gradiente de la función f en el punto dado:

(a) $f(x, y) = \ln(x + y - 1) + e^{2xy}$, $P = (0, 2)$.

(b) $f(x, y, z) = xze^{xy} + yze^{xz} + xye^{yz}$, $P = (-1, 2, 1)$.

24.- Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto indicado:

(a) $f(x, y) = xy$, $(2, 1, 2)$.

(b) $f(x, y) = \dfrac{e^x}{x^2 + y^2}$, $P = (1, 1, e/2)$.

25.- Representar la gráfica de la superficie $z = \ln(x^2 + y^2)$ y el plano tangente en el punto $(-2, 0, \ln 4)$.

26.- Trazar los planos tangentes a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ que son paralelos al plano $x + 4y + 6z = 0$.

27.- Hallar los puntos de la superficie $x^2 + 2xy - y^2 + 3z^2 - 2x + 2y - 6z - 2 = 0$ donde el plano tangente es paralelo al plano YZ.

28.- Probar que todo plano tangente al cono $z^2 = x^2 + y^2$ pasa por el origen.

29.- Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$ tales que $f(1,1) = 2$, $g(1,1) = 3$, $f'_x(x,y) = g'_x(x,y) = 2xy$. Calcular $F'_x(1,1)$ si $F(x,y) = e^{f(x,y)+g(x,y)}$.

30.- Dadas las funciones $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$, y $g(x) = (x,x)$, estudiar la diferenciabilidad de la función compuesta $(f \circ g)(0)$.

31.- Calcular $\dfrac{du}{dt}$ si:

(a) $u = \ln\big(\operatorname{sen}(x/\sqrt{y})\big)$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$.

(b) $u = xyz$, $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$.

(c) $u = \ln(x/y) + xy$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = 1/\operatorname{sen} t$.

32.- Escribir la fórmula de $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ para las siguientes funciones:

(a) $h(x,y) = f\big(x, u(x,y)\big)$.

(b) $h(x) = f\big(x, u(x), v(x)\big)$.

(c) $h(x,y,z) = f\big(u(x,y,z), v(x,y), w(x)\big)$.

33.- Sea $z(x,y) = x \cdot f(2y/x) + xy \cdot g(3x - y, x^2 - y^2)$, con $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ y $g \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$. Suponiendo que $f(2) = 2$, $f'(2) = -1$, $g(2,0) = 0$, $g'_1(2,0) = 1$ y $g'_2(2,0) = -1$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$.

34.- Dadas las funciones $f(r,s,t) = (r + s + t, r - 2s + 3t, 2r + s - t)$ y $g(x,y,z) = x + 2yz$, calcular las derivadas parciales de la función compuesta $g \circ f$.

35.- Demostrar que $x^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$ si $z = \dfrac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$, siendo φ una función derivable.

36.- Sea $z = e^y\,\Phi(ye^{x^2/2y^2})$, donde Φ es una función derivable. Comprobar que $(x^2 - y^2)z'_x + xyz'_y = xyz$.

37.- Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $F(r, \vartheta) = f(r \cos \vartheta, r \operatorname{sen} \vartheta)$. Probar que

$$\|\overrightarrow{\nabla f}(r \cos \vartheta, r \operatorname{sen} \vartheta)\|^2 = [D_1 F(r, \vartheta)]^2 + \frac{1}{r^2}[D_2 F(r, \vartheta)]^2.$$

38.- Si $z = f(x, y)$ es diferenciable y homogénea de grado p, probar que f'_x y f'_y son homogéneas de grado $p - 1$.

39.- Sea $z(x, y) = x \cdot f(x/y) + y \cdot g(y/x)$, para $x, y \neq 0$, donde $f, g \in C^{(1)}(\mathbb{R})$. Probar que $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = z$.

40.- Sea $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$ y se define $g(x, y) = \dfrac{1}{f(x - y, y)}$. Suponiendo que $f(-1, 3) = -1$, $f'_1(-1, 3) = 2$, $f'_2(-1, 3) = -3$, calcular, caso de ser posible, $dg(2, 3)$.

41.- Dada la función $f(x, y, z) = ze^{xy} + x^2yz^3$, comprobar que $f_{xyz} = f_{zyx}$.

42.- Sea $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$. Calcular $f'(t)$, $f''(t)$.

43.- Dada la ecuación

$$[F(x) + G(y)]^2 e^{z(x,y)} = 2F'(x)G'(y),$$

comprobar que $D_{21}z \neq 0$.

44.- La sustitución $u = x + y$, $v = xy^2$ transforma la función $f(u, v)$ en la función $F(x, y)$. Expresar $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ en función de las derivadas parciales de f.

45.- Si $w(x, y) = f(x+y)+g(x-y)$, comprobar que $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f''(u) + g''(v)$, donde $u = x + y$, $v = x - y$.

46.- Comprobar en cada uno de los casos la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$:

(a) $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$.

(b) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

47.- Si $w = \operatorname{sen}(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$, comprobar que $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

48.- Escribir el desarrollo de Taylor de segundo orden para las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = e^x \cos y$ en el punto $(0, 0)$.

(b) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$ en el punto $(0, \pi/2)$.

(c) $f(x, y) = \cos(x \cdot y)$ en el punto $(\pi/2, 0)$.

(d) $f(x, y) = e^{x^2+y^2+xy}$ en el punto $(0, 0)$.

49.- Contestar verdadero o falso justificando la respuesta:

(a) Si f es diferenciable, posee derivadas parciales de primer orden continuas.

(b) Si f es continua, posee derivadas parciales de primer orden.

(c) Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Si $f'_{\vec{v}}(\vec{x}) = 0$, para todo $\vec{x} \in B_r(\vec{a})$ y para todo vector unitario $\vec{v}$, entonces f es constante en $B_r(\vec{a})$.

(d) $\overrightarrow{\nabla(fg)} = f \cdot \overrightarrow{\nabla g} + g \cdot \overrightarrow{\nabla f}$.

(e) Para cualquier función f con derivadas parciales segundas se verifica $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.