Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
24 de Agosto de 2018

Clase Auxiliar #15 : Preparación para el Examen

Profesor: Aris Daniilidis
Auxiliares: Matías Altamirano, Freddy Flores, Pablo López

P1. a) Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una aplicación $\mathcal{C}^1$ y sea $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una función definida a partir de f por

$$g(u,v)=f(\cos u+\sin v,\cos v+\sin u,e^{u-v})$$

i) Demuestre que g es de Clase $\mathcal{C}^1$.

ii) Sabiendo que la matriz asociada a $Df(1,1,1)$ es

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

calcule la matriz asociada a $g(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

b) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ y definamos $g(u,v)=f(x,y)$ donde

$$x=u+v,\quad y=uv^2$$

Suponiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,1)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}(2,1)=1$$

calcule

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(1,1)\quad \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(1,1)$$

P2. a) Determinar el volumen de la región limitada por la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=a^2$ y los planos $x=y$, $y=\sqrt{3}x$ y que está dentro de $x\geq 0$ y $y\geq 0$.

b) Calcular

$$\int\int_E \sqrt{x^2+y^2}dA$$

donde E es la intersección del disco $(x-a)^2+y^2\leq a^2$ donde $a>0$ y la región $|y|\leq x$.

P3. a) Considere E un espacio vectorial normado cualquiera.

(i) Pruebe que si $A\subseteq E$ es un abierto, entonces $x+rA$ es abierto para todo $x\in E$, para todo $r\in\mathbb{R}$.

(ii) Demuestre que si A y B son dos conjuntos abiertos de E, entonces el conjunto

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$$

es también un conjunto abierto.

b) Considere la función

$$f(x,y)=\ln(e^x+e^y)$$

Muestre que es convexa y pruebe que el conjunto

$$S_\alpha=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3\ln(e^x+e^y)+x^2\leq\alpha\}$$

es un conjunto convexo.