

## Prueba P3 C3

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz \quad ; \quad B = \overline{B_2(0,1)} \subseteq \mathbb{R}^3$$

a) Encuentre los pts críticos de  $f$

Sol: Puntos  $\nabla f = \vec{0}$ :

$$\nabla f(x, y, z) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - z \\ 2y \\ 2z - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = 0 \wedge x = 2z \wedge z = 2x \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

$\therefore$  el único pto crítico es

$$\boxed{P_1 = (0, 0, 0)} //$$

b) Justifique existencia de máx y mín sobre  $B$  de  $f$

Sol:  $B$  es compacto, por lo que es un cito.

cerrado y acotado en dim. finita

$f$  es continua por álgebra y composición de continuas

Weierstrass

$\Rightarrow$  los máx y mín existen y se alcanzan sobre de  $B$ . ///

c) Obtenga los óptimos sobre  $B$

Sol: Ya tenemos un pto. crítico sobre  $\text{int}(B)$ .

Estudiamos ahora  $\partial B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

Usando Lagrange:

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \nabla L = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - z \\ 2y \\ 2z - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ 2\lambda y \\ 2\lambda z \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

De (2), se tiene que  $2y(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee \lambda = 1$ .

• Si  $\lambda = 1$ , resolviendo el sistema de (1) y (3) juntos

$$\Rightarrow x = z = 0.$$

Caso  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , entonces  $y = \pm 1$

$\therefore P_2 = (0, 1, 0)$  y  $P_3 = (0, -1, 0)$  son pts críticos.

• Si  $y = 0$ , el sist. de (1) y (3) queda:

$$\begin{cases} 2x - z = 2\lambda x \\ 2z - x = 2\lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(\lambda - 1) + z = 0 & (4) \\ 2z(\lambda - 1) + x = 0 & (5) \end{cases}$$

Molt. (4) por  $-z$ ; (5) por  $x$  y sumando:

$$\Rightarrow x^2 - z^2 = 0 \Rightarrow x = z \vee x = -z$$

Caso  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , y además  $y = 0$ , se tiene que

$$x^2 + 0^2 + (\pm x)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Luego, haciendo las sustituciones, se obtienen:

$$P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); P_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$P_6 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); P_7 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Así:  $f(P_1) = 0$

$$f(P_2) = f(P_3) = 1$$

$$f(P_4) = f(P_5) = \frac{1}{2}$$

$$f(P_6) = f(P_7) = \frac{3}{2}$$

← Es el mínimo

← Son los máximos