

P11

Puerta Axx #12

Gracias a la geometría de la región A, buscar extremos se puede hacer en sus diferentes zonas: interior, tapa, yuanto del parrillado y en la circunferencia que es la intersección de las dos últimas zonas.

Interior | Aquí se plantea un pbl irrestricto, por lo que aplicamos condiciones de 1er orden:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caso que es imposible

$\Rightarrow$ No hay extremos en el interior.

Tapa | Usamos Lagrange. La restricción aquí es $z=1$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(z - 1).$$

Aplicamos condiciones de 1er orden sobre $\mathcal{L}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla_{(x,y,z)} \mathcal{L}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que +b1 es imposible

$\Rightarrow$ +pco1 hay extremos aquí.

Nota | La restr. es $x^2 + y^2 = z$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 - z)$$

$$\therefore \nabla_{(x, y, z)} \mathcal{L}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda x \\ 1 + 2\lambda y \\ 1 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

De (3): $\Rightarrow \lambda = 1$, y usando en (1) y (2):

$$\Rightarrow \begin{aligned} 1 + 2x &= 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ 1 + 2y &= 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Como } x^2 + y^2 = z \Rightarrow z = \frac{1}{2}.$$

Así, tenemos que un punto es

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Integración | Ahora se usan ambas restricciones. Así:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(z - 1)$$

$$\Rightarrow \nabla_{(x, y, z)} \mathcal{L}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda x \\ 1 + 2\lambda y \\ 1 - \lambda + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{De (4):} & \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\lambda \\ \text{De (5):} & \Rightarrow y = -\frac{1}{2}\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = y$$

Se sabe que $z=1$ y $x^2+y^2=z$

$$\Rightarrow x^2+y^2=1$$

$$x=y \leadsto \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x=y=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, z=1$$

Así, sabemos otros dos candidatos:

$$P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right), P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right).$$

Lo resta evaluar los candidatos para clasificarlos:

$$f(P_1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(P_2) = 1 + \sqrt{2}$$

$$f(P_3) = 1 - \sqrt{2}$$

Así: Sobre A , el mínimo se alcanza en $P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ y vale $-\frac{1}{2}$; el máximo se alcanza en $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$ y vale $(1 + \sqrt{2})$.

Obs: estos máximos y mínimos existen pqr^1 A es compacto (cerrado y acotado en $\mathbb{R}^3$) y f es continua.

P21

a) $f(x,y) = x^2 + (xy-1)^2$
 1) Debemos resolver $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 2(xy-1)y \\ 2(xy-1)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 2x + 2(xy-1)y &= 0 & (1) \\ 2(xy-1)x &= 0 & (2) \end{aligned}$$

Minimo (2), para que ello se haga 0, tenemos dos opciones: $xy=1$ $\vee$ $x=0$. Veamos que $xy=1$ no sirve:

Reemplazando $xy=1$ en (1):

$$\Rightarrow 2x + 2(1-1)y = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Pero } xy=1 \Rightarrow x \neq 0$$

$$\therefore xy=1 \text{ no sirve}$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ sirve.}$$

Reemplazando $x=0$ en (1):

$$\Rightarrow 2(0-1)y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Con ello, el único punto crítico es $(0,0)$.

2) Notemos que $f(0,0) = 1$. Este no puede ser mínimo local, por si tomamos la sec. $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, vemos que $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + 1 \rightarrow 1$, pero $\forall n \geq 2, f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) < 1$; o sea, por cerca del $(0,0)$ como queramos $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \rightarrow 0)$, hay otro mínimo.

2) Por 6 tudo, el único candidato a extremo es nulo, y por 6 todo, no hay mínimos o máximos globales.

(Punto $(0,0)$ puede ser mínimo local: propuesto)

$$b) g(x,y) = x^2 + y^2(1-x^3)$$

$$1) \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y^2(-3x^2) \\ 2y(1-x^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3x^2y^2 = 0 \quad (1)$$

$$2y(1-x^3) = 0 \quad (2)$$

$$\text{De (2), } y=0 \vee x=1.$$

$$y=0 \stackrel{en(1)}{\Rightarrow} 2x - 0 = 0 \Rightarrow \underline{x=0}$$

$$\Rightarrow \underline{(0,0) \text{ es pto crítico.}}$$

$$x=1 \stackrel{en(1)}{\Rightarrow} 2 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \underline{(1, \sqrt{\frac{2}{3}}), (1, -\sqrt{\frac{2}{3}}) \text{ son pts críticos.}}$$

2) Calcular $H_f(x,y)$:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 - 6xy^2 & -6x^2y \\ -6x^2y & 2(1-x^3) \end{pmatrix}$$

Ahora, otorgamos los valores propios de $H_f(x,y)$, para aplicar condición de 2º orden:

$$\det(H_f(x,y) - \lambda I_{2 \times 2}) = \begin{vmatrix} 2 - 6xy^2 - \lambda & -6x^2y \\ -6x^2y & 2(1-x^3) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2 - 6xy^2 - \lambda)(2(1-x^3) - \lambda) - 36x^4y^2$$

$$= \lambda^2 - 24x^4y^2 + 2x^3\lambda - 4x^3 + 6xy^2\lambda - 12xy^2 - 4\lambda + 4$$

$$= \lambda^2 + \lambda[2x^3 + 6xy^2 - 4] + [-24x^4y^2 - 4x^3 - 12xy^2 + 4]$$

Ahora vamos con el pto crítico:

$$(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$$

$$\lambda = \frac{-(2 + 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} - 4) \pm \sqrt{(2 + 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} - 4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} - 4 - 12 \cdot \frac{2}{3} + 4)}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-16 - 4 - 8 + 4)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2} = -1 \pm 5$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -6, \lambda_2 = 4$$

$\Rightarrow H_f(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$ no es ni semidef. positiva/negativa
 con ello, los pto $(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$ no son mda.
 (por cond. necesaria)

$(0,0)$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0$$

$\Rightarrow H_f(0,0)$ es ~~una~~ def. positiva

$\Rightarrow (0,0)$ es mínimo local estricto

3) El único extremo es un mínimo local estricto en $(0,0)$. ////