MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Aris Daniilidis
Auxiliares: Matías Altamirano, Freddy Flores y Pablo López

Auxiliar 7

5 de mayo de 2018

P1. [**Regla de la cadena 1**]

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Definimos las funciones reales $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi(t) \doteq f(t, f(t,t))$$

y

$$\psi(t) \doteq f(t, f(t, f(t,t))) = f(t, \psi(t)).$$

Calcule $\psi'(t)$.

P2. [**Regla de la cadena 2**]

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Consideremos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, con $\nabla g(0,0) = (1,3)^T$. Se define $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como

$$h(x,y,z) \doteq g(f(x) + f(y)^2, f(x) + f(y)^2 + f(z)^3).$$

Obtenga $\nabla h(0,0,0)$.

P3. [**Calor estacionario**]

Es bien sabido y comprobado por los muy entendidos en las ciencias físicas, que la temperatura $T(x,y)$ sobre una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ acotada y abierta, satisface la Ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

En este ejemplo, tomaremos

$$\Omega \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Dada la geometría de la región Ω, se puede suponer simetría esférica; es decir, T sólo dependerá del radio: $T(x,y) = u(\sqrt{x^2+y^2})$, con $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, una función derivable dos veces en $(1,2)$, continua en $[1,2]$. Por otro lado, se conoce la temperatura en la frontera de Ω: T_1 en el contorno interior, y T_2 en el exterior.

Encuentre la temperatura T en todo Ω.

P4. [**TVM en varias variables**]

Teo: (Valor medio en varias variables) Sea $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ diferenciable, sean $x, y \in \mathbb{R}^d$. Entonces,

$$\exists z_0 \in [x,y] \text{ tal que } \nabla g(z_0)^T (y - x) = g(y) - g(x),$$

donde $[a,b] \doteq \{x \in \mathbb{R}^d \mid \exists \lambda \in [0,1] \text{ tal que } x = \lambda a + (1-\lambda) b\}$.