MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Aris Daniilidis
Auxiliares: Matías Altamirano, Freddy Flores y Pablo López

Auxiliar 6

27 de abril de 2018

P1. [**EVN's hasta en la sopa**]

Recordemos que se define $\mathcal{L}(X,Y) \doteq \{f : X \to Y \mid f \text{ es lineal y continua}\}$, y se dota de la norma $\|T\| \doteq \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$. El objetivo de esta pregunta será probar que en algún sentido —en el sentido isométrico—, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ se identifica con $\mathbb{R}^d$, imponiendo diferentes normas en este último.

a) Sea $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$. Recordemos (de MA1102) que la acción de una función lineal se caracteriza por cómo actúa en la base canónica $(e_i)_{i=1}^d$de $\mathbb{R}^d$. De esta forma, se define

$$\hat{f} \doteq \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_d) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d.$$

Demuestre que la asignación $\hat{\ } : \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^d$, dada por $f \mapsto \hat{f}$, está bien definida, es lineal y biyectiva.

b) Pruebe que $\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, $\|f\| = \|\hat{f}\|_2$, tomando $\|f\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|_2}$.

c) Demuestre que $\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, $\|f\| = \|\hat{f}\|_1$, esta vez con $\|f\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|_\infty}$

P2. [**The Dark Side of the Moon - Pink Floyd**]

En cátedra se vio que las funciones lineales de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}$ son siempre continuas. Si se toma X un EVN de dimensión infinita, ¿existen funciones lineales no continuas? La respuesta es positiva, y a ello apuntará esta pregunta.

Sea $(e_i)_{i\in I}$ una base del espacio X (que necesariamente será infinita, ya que $\dim X = +\infty$; por otro lado su existencia está garantizada por el Axioma de Elección, si es que creemos en él: hay derecho a la objeción de conciencia); y supongamos —sin pérdida de generalidad— que $\forall i \in I, \|e_i\| = 1$. Como $(e_i)_{i\in I}$ es un conjunto infinito, es posible extraer un subconjunto $B \subseteq (e_i)_{i\in I}$ infinito numerable, que podemos identificar con $\mathbb{N}$; es decir, diremos $B = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aplicando el mismo argumento de P1, es posible definir un funcional $T : X \to \mathbb{R}$ mediante su acción en la base, de la forma

$$T(e_i) \doteq \begin{cases} i, & \text{si } i \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{si } i \in I \backslash \mathbb{N} \end{cases}$$

Pruebe que T es no acotado; es decir, $\|T\| = \infty$, y concluya que es no continuo, y por lo tanto, no diferenciable.

P3. [Diferenciabilidad al choque]

Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$f(x,y) \doteq \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Demuestre que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

b) Pruebe que las derivadas parciales de f no son continuas. ¿Es esto una contradicción?

c) Concluya, en menos de una línea, que f es continua.