

Pauta Aux #4.

P1 $(X, \|\cdot\|_X)$ normados

a) $(Y, \|\cdot\|_Y)$

def: f unif. Continua $\Rightarrow \left((x_n)_n \in X \text{ Cauchy} \Rightarrow (f(x_n))_n \in Y \text{ Cauchy} \right)$

Sea $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x, y \in X$ $\|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_Y < \epsilon$

Como $(x_n)_n$ es de Cauchy $\exists N > 0$, $\forall n, m \geq N$

$\|x_n - x_m\|_X < \bar{\epsilon}$ tan chico como queramos

luego, elegimos $\bar{\epsilon} = \delta$ (podemos hacerlo!) $\Rightarrow \|x_n - x_m\|_X < \delta$

$\Rightarrow \|f(x_n) - f(x_m)\|_Y < \epsilon$

$\therefore (f(x_n))_n$ es de Cauchy

b) Decimos una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ es continua

Como $\mathbb{R}$ es Banach $\Rightarrow (x_n)_n$ Cauchy converge $x_n \rightarrow \bar{x}$

como f continua $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$

i.e. $(f(x_n))_n$ converge

$\therefore (f(x_n))_n$ es de Cauchy

Pero, $f(x) = x^2$ no es unif. Continua!

¿Por qué?

P2) $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{\|x\|_\infty}$$

Notación

$$\|x\|_\infty = \|x\|$$

Problemas por definición

Sean $\varepsilon > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\delta = \frac{\varepsilon^2}{8}$ tq $\|x - y\| < \delta$

1) Si $x, y \in B(0, \frac{\varepsilon^2}{2})$

$$|\sqrt{\|x\|} - \sqrt{\|y\|}| \stackrel{\text{des. } \Delta}{\leq} \sqrt{\|x\|} + \sqrt{\|y\|} < \varepsilon$$

2) Si $x, y \notin B(0, \frac{\varepsilon^2}{2})$

$$|\sqrt{\|x\|} - \sqrt{\|y\|}| \stackrel{\text{reconstituyendo}}{=} \frac{|\|x\| - \|y\||}{\sqrt{\|x\|} + \sqrt{\|y\|}} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{\|x - y\|}{\varepsilon} < \frac{\delta}{\varepsilon}$$

(*)

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\frac{\varepsilon^2}{8}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{8} < \varepsilon //$$

Aquí, usamos desigualdad triangular inversa

Dem:

1) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

luego, cambiamos $x \sim y$, y $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| //$

2) ahora, si $x \in B(0, \frac{\varepsilon^2}{2})$, $y \notin B(0, \frac{\varepsilon^2}{2})$

Sabemos que $\|y - x\| < \delta \Rightarrow \|y\| - \|x\| < \delta \Rightarrow \|y\| - \delta \leq \|x\|$
 $\Rightarrow \|x\| \geq \frac{\varepsilon^2}{4} - \delta > \frac{\varepsilon^2}{8}$

Tenemos que $\|x\| \geq \frac{\varepsilon^2}{8}$ y que $\|y\| \geq \frac{\varepsilon^2}{4}$ pues $y \notin B(0, \frac{\varepsilon^2}{2})$

$$\Rightarrow \sqrt{\|x\|} + \sqrt{\|y\|} \geq \frac{\varepsilon}{2} //$$

=)

Si aplicamos el mismo argumento

$$|\sqrt{\|x\|} - \sqrt{\|y\|}| = \frac{|\|x\| - \|y\||}{\sqrt{\|x\|} + \sqrt{\|y\|}} \leq \frac{\delta}{\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\varepsilon^2}{8} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} = \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon \quad \square$$

$\therefore f(x) = \sqrt{\|x\|}$ es Lipschitz.

b) Supongamos que f es Lipschitz $f(x) = \sqrt{\|x\|}$
 $\exists k > 0: \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|_\infty \xrightarrow{\text{en realidad es m\u00f3dulo}} \forall x, y \in \mathbb{R}^d$

ahora, $y = \vec{0}$ $|\sqrt{\|x\|}| \leq k \|x\|_\infty \quad ()^2 \quad x \neq 0$

$$\|x\|_\infty^2 \leq k^2 \|x\|_\infty^2$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty \geq \frac{1}{k} > 0$$

pero, si tomamos $(x_n) \in \mathbb{R}^d$ $\nrightarrow 0$ $x_n \rightarrow 0$ tenemos contradicción $\square$

$\therefore f$ no es Lipschitz.



P3) Probar que el TBU es

a) Sea $z \in C([0,1], \mathbb{R}^d)$ que verifica las condiciones de enunciado, veamos que es pto fijo.

$$F(z)(t) = \int_{t_0}^t \Phi(u, z(u)) du + x_0$$

pues
verifica

$$= \int_{t_0}^t z'(u) du + z(t_0)$$

$$= z(t) - z(t_0) + z(t_0) = z(t)$$

$\therefore$ es pto fijo

Otro si $z = F(z)$

$$z(t) = \int_{t_0}^t \Phi(u, z(u)) du + x_0$$

$$z(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} \Phi(u, z(u)) du + x_0 = x_0$$

$$z'(t) = \Phi(t, z(t))$$

b) Primero notar que si $g \in C([0,1], \mathbb{R}^d) \Rightarrow g(t) \in \mathbb{R}^d$ luego $\|g(t)\|_\infty \neq \|g\|_\infty$

$$\|g(t)\|_\infty = \max \{ |g_i(x)| : i \in \{1, \dots, d\} \} \quad \text{con} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix}$$

$$\|g\|_\infty = \sup \{ \|g(t)\|_\infty : t \in [0,1] \}$$

Luego, notaremos por $\|\cdot\|_\infty$ a la norma infinito en $\mathbb{R}^d$.

$\Rightarrow$

En efecto, probaremos $\forall y, x \in C([0, T], \mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \|F(x)(t) - F(y)(t)\|^\infty &= \left\| \int_{t_0}^t \Phi(u, x(u)) du - \int_{t_0}^t \Phi(u, y(u)) du \right\|^\infty \\ &= \left\| \int_{t_0}^t (\Phi(u, x(u)) - \Phi(u, y(u))) du \right\|^\infty \\ &\stackrel{\text{prop. norma}}{\leq} \int_{t_0}^t \|\Phi(u, x(u)) - \Phi(u, y(u))\|^\infty du \\ (ii) &\leq \int_{t_0}^t K \|x(u) - y(u)\|^\infty du \\ &\stackrel{\text{prop. norma}}{\leq} \int_{t_0}^t K \|x - y\|_\infty du = (t - t_0) K \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

luego $\|F(x)(t) - F(y)(t)\|^\infty \leq (t - t_0) K \|x - y\|_\infty$ / tenemos $\sup_{t \in [0, T]}$

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq \sup_{t \in [0, T]} (t - t_0) K \|x - y\|_\infty \leq T K \|x - y\|_\infty$$

y por enunciado $T \cdot K < 1 \quad \therefore F$ es contractante $\blacksquare$

c) Por las aux anteriores tenemos que $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ es Banach pues $C([0, T], \mathbb{R}^d) \subset A$

$$A := A([0, T], \mathbb{R}^d)$$

luego, utilizando el teorema de punto fijo de Banach. Concluimos $\blacksquare$

la solución es única por la unicidad del pto fijo!

U.