

Clase Auxiliar #2: Topología, Compacidad y Espacios de Banach

Profesor: Aris Daniilidis

Auxiliares: Matías Altamirano, Freddy Flores, Pablo Lopez

P1. Encuentre en forma explícita interior, adherencia y frontera de los siguientes conjuntos, justificando brevemente sus respuestas. Indique además si alguno de estos conjuntos es abierto o cerrado.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|, x^2 + y^2 \leq 5\}, B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d : x_1 \in \mathbb{Q}\}, C = \left\{ \left(\frac{1}{k}, (-1)^k \right) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{N} \right\}$$

P2. Dados dos conjuntos X e Y , definimos el conjunto $X + Y$ como

$$X + Y := \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

- (a) Pruebe que si A es un conjunto cerrado y B es compacto, entonces $A + B$ es un conjunto cerrado.
- (b) Para convencerse de que la compacidad de al menos uno de los conjuntos es necesaria para obtener lo deseado, considere los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$:

$$A = \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad B = \left\{ -n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Demuestre que ambos son cerrados pero que $A + B$ no lo es.

P3. Se define $\mathbf{L}^\infty([0, 1])$ como el espacio de las funciones acotadas de $[0, 1]$ a valores en $\mathbb{R}$.

- (a) Pruebe que $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ es norma en $\mathbf{L}^\infty([0, 1])$
- (b) Demuestre que $\mathbf{L}^\infty([0, 1])$ dotado de la norma $\|f\|_\infty$ es un espacio de Banach.