

MA1101-8 Introducción al álgebra**Profesor:** Maya Stein**Auxiliar:** Juan d'Etigny S.**Auxiliar 13**

17 de agosto de 2018

- P1.-** a) Sea $z = \frac{5}{3+\cos(\theta)+isen(\theta)}$. Calcule $\operatorname{Re}(z)$ y también $\operatorname{Im}(z)$
 b) Escriba de forma cartesiana y polar el complejo

$$\frac{z_1(\frac{1}{2} + \frac{i}{2})}{z_2(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})}$$

Donde tenemos que $|z_1| = 3$, $|z_2| = 2$, $\arg(z_1) = \pi/4$, $\arg(z_2) = \pi/2$

- P2.-** a) Sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que $|z - i| = |z + i| \iff z \in \mathbb{R}$
 b) Sea $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Muestre que todas las soluciones de $|z| = |z - \epsilon|$ pertenecen a una misma recta en el plano complejo.
 c) Demuestre que si $z \in \mathbb{C}$ cumple $|z| < 1$, entonces $\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) > 0$

- P3.-** Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, considere los números reales $A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$ y $B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\alpha)$.

- a) Demuestre que $A + iB = (1 + \cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n$
 b) Escriba $A + iB$ en su forma polar y deduzca que

$$A = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right) \quad \wedge \quad B = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

- P4.-** a) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$(1 + i \tan(\alpha))^n + (1 - i \tan(\alpha))^n = 2 \sec^n(\alpha) \cos(n\alpha)$$

- b) Si z_1 y z_2 son las soluciones de la ecuación $z^2 - 2z + 2 = 0$, demuestre (sin usar inducción) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$; $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{(\cot(\theta) + z_1 - 1)^n - (\cot(\theta) + z_2 - 1)^n}{z_1 - z_2} = \sin(n\theta) (\operatorname{cosec}(\theta))^n$$

¿Cómo se relaciona esto a lo que daría si se cambia $\tan(\alpha)$ por $\cot(\alpha)$ en la parte anterior?

P5.- Propuesto: Se desea probar que

$$\sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) = \frac{\cos(n\theta) \sin(n\theta + \theta)}{\sin(\theta)}$$

- a) Para $r \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, demuestre que $\sum_{k=0}^n r^{2k} = \frac{r^{n(n+1)} - r^{-n-1}}{r - r^{-1}}$
- b) Calcule $S = \sum_{k=0}^n e^{i2k\theta}$ en su forma cartesiana, y concluya la igualdad que se desea probar al analizar la parte real e imaginaria de S .

P6.- Propuesto: Sean $0, z, w \in \mathbb{C}$ tres complejos que forman un triángulo rectángulo en 0 (su ángulo recto está en 0).

- a) Demuestre que $\bar{z}w + z\bar{w} = 0$
- b) Pruebe que $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2$

P7.- Propuesto: sea $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $\chi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ es un caracter de $(\mathbb{Z}_n, +)$ si:

- $|\chi(k)| = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}_n$
- χ es un homomorfismo de $(\mathbb{Z}_n, +)$ en $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

Para $m \in \{0, \dots, n-1\}$, se define $\phi_m : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ por $\phi_m([k]) = e^{i\frac{2\pi mk}{n}}$

- a) Pruebe que ϕ_m está bien definida y que es un caracter de $(\mathbb{Z}_n, +)$
- b) Use que en $\mathbb{Z}_n$ se tiene que al sumar n -veces 1 da $= 0$ para probar que si χ es un caracter de $(\mathbb{Z}_n, +)$, entonces $\chi \in \{\phi_0, \dots, \phi_{n-1}\}$