

a)
P5 Procedemos de forma parecida a la P3 b) (*).
definimos para $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n\text{-veces}}$. Como A es anillo,

en particular $(A, +)$ es lci. $\Rightarrow a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Como A es finito por hipótesis, tenemos que $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $a_n = a_m$ para algún $m \in \{1, \dots, n-1\}$ (se puede ver con una contradicción similar a la que aparece en (*)).

Con esto tenemos $\underbrace{1+1+\dots+1}_{n\text{-veces}} = a_n = a_m = \underbrace{1+1+\dots+1}_{m\text{-veces}}$

$\Rightarrow \underbrace{1+1+\dots+1}_{(n-m)\text{ veces}} = 0$ Como $n > m \Rightarrow n-m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que será el p que buscamos

b) Si $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tendremos que

$\underbrace{1+1+\dots+1}_{a \cdot b\text{-veces}} = \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{a\text{-veces}} \cdot \underbrace{(1+\dots+1)}_{b\text{-veces}}$ por distributividad

Como A no tiene divs. del 0 por hipótesis

$\Rightarrow \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{a\text{-veces}} \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{b\text{-veces}} = 0 \Rightarrow \underbrace{(1+\dots+1)}_{a\text{-veces}} = 0 \vee \underbrace{(1+\dots+1)}_{b\text{-veces}} = 0$

Nota importante: En el enunciado estaba mal escrito la propiedad es con " $\vee$ ", no con " $\wedge$ ".