MA1101-8 Introducción al álgebra
Profesor: Maya Stein
Auxiliar: Juan d'Etigny S.

Problemas Propuestos Auxiliar 12

P1.- Sea $(G, *)$ un grupo finito, pruebe que $\forall g \in G$,

$$H = \{g^n \in G \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Es subgrupo abeliano de G

P2.- Sea $(G, *)$ grupo, y $H, K \leq G$. Demuestre que:

a) $H \cup K \leq G \iff H \subseteq K \wedge K \subseteq H$

b) $\forall a, b \in G,\ (H * a)(H * b) = H * (a * b) \iff \forall c \in G,\ H * c = c * H$

P3.- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un subconjunto $I \subseteq A$ se dirá ideal de A si y solo si:

- $(I, +)$ es grupo.
- $\forall a \in A,\ b \in I,\quad a \cdot b\ \wedge\ b \cdot a \in I$

a) Sea $F : (A, +, \cdot) \to (B, \oplus, \odot)$ un morfismo sobreyectivo de anillos. Demuestre que si e_B es el neutro aditivo de B, entonces $F^{-1}(\{e_B\})$ es un ideal para A

b) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad, e I un ideal suyo:

1) Demuestre que $1 \in I \Rightarrow I = A$
2) Demuestre que si $\exists x \in I$ invertible para $\cdot$, entonces $I = A$

c) Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo, se define para $a \in A$ su conjunto aniquilador como $Ann(a) = \{b \in A \mid b \cdot a = 0\}$. Pruebe que $\forall a \in A$, se tiene que $Ann(a)$ es un ideal de A.

P4.- Sean $n \geq 2 \in \mathbb{N}$ y $S_n = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = 1\}$.

a) Demuestre que $(S_n, \cdot) \leq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

b) Muestre que $f : S_n \to \mathbb{Z}_n$, tal que $f(e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = [k]_n$ con $k \in \{0, ..., n-1\}$ es un isomorfismo