MA1101-8 Introducción al álgebra
Profesor: Maya Stein
Auxiliar: Juan d'Etigny S.

Auxiliar 9

6 de julio de 2018

P1.- Calcule las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}b^i$

b) $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^n}$

c) Se define $S(j,n) := \sum_{k=0}^{n}k^j$. Sabiendo esto, calcule $\sum_{l=0}^{j}\binom{j+1}{l}S(l,n)$

P2.- Demuestre que $\forall i,k,n\in\mathbb{N}$, tales que $0\le k\le i\le n$:

$$\binom{n}{i}\binom{i}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$$

y utilice esto para probar que

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}=3^n$$

P3.- *a)* Sea $\mathcal{C}_A$ una partición de algún conjunto finito A. Demuestre que $|A|=\sum_{B\in\mathcal{C}_A}|B|$

b) Sea $A=\{1,2,...,n\}$ un conjunto finito y considere la secuencia $(x_0,x_1,...)$, donde cada uno de los elementos pertenece a A, es decir, $x_i\in A$, $\forall i\in\mathbb{N}$. Pruebe que existen $i,j\in\mathbb{N};\ \ i\neq j$, tales que $x_i=x_j$.

P4.- Sea A un conjunto y $f:A\to\mathbb{N}$ una función. Demuestre que si $\forall n,\ \ f^{-1}(n)$ es numerable, entonces A es numerable.

P5.- Un saltamontes debe cubrir, saltando, la distancia de 0 a 1, avanzando de izquierda a derecha (no se devuelve). En cada punto en que se encuentre puede elegir saltar hasta 1 (y completar el recorrido) o avanzar la mitad del tramo restante. Pruebe que la colección de recorridos o caminos (secuencias de pasos) por los que puede optar el insecto es numerable.

P6.- Propuesto: Calcule las siguientes sumatorias:

- $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!(n-k)!}$
- $\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{i!(k-i)!}$

P7.- Propuesto: Sean $r, n \in \mathbb{N}$, tales que $0 \leq n < r$. Demuestre sin usar inducción que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{r-1}{n}$$

Le puede servir la identidad de Pascal para coeficientes binomiales.

P8.- Propuesto:

- Demuestre que el conjunto de todos los triángulos cuyos vértices son elementos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable.
- Demuestre que el conjunto de todos los polígonos cuyos vértices son elementos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable.

P9.- Propuesto: Demuestre que el siguiente conjunto es numerable

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid (f(0) = 0) \wedge (\exists d \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) = f(n) + d)\}$$

P10.- Propuesto: Sea B un conjunto infinito numerable y $\preceq$ una relación de orden total definida en B. Pruebe que, dado $a \in B$, uno de los dos conjuntos siguientes es infinito numerable:

$$B_1 = \{b \in B \mid b \preceq a\}, \qquad B_2 = \{b \in B \mid a \preceq b\}$$