

MA1101-8 Introducción al álgebra

Profesor: Maya Stein

Auxiliar: Juan d'Etigny S.



Trabajo dirigido 2

28 de agosto 2018

P1.- Sean $0, z, w \in \mathbb{C}$ complejos que forman un triángulo rectángulo que tiene su ángulo recto en el origen

- a) Demuestre que $\bar{z}w + \bar{w}z = 0$
- b) Usando lo anterior verifique que $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2$

- P2.-**
- a) En la **P6** de la auxiliar 8 (propuesto), se pidió calcular $\sum_{k=1}^n \sin(2k)$. Intente resolverla ahora usando su conocimiento de números complejos. Resuelva además la suma $\sum_{k=1}^n \cos(k\theta)$ (si quiere se puede revisar la **P5** de la auxiliar 13, donde está guiado)
 - b) Considere la ecuación $\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z} + k = 0$, donde $k \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Demuestre que representa una recta perpendicular a $\overline{0P_0}$ donde P_0 es el punto del plano asociado al z_0
 - c) Sea $x_n + iy_n = (1 + i\sqrt{3})^n$. Probar la relación recurrente $x_{n-1}y_n - x_n y_{n-1} = x^{2n-2}\sqrt{3}$
 - d) Si $z^n = 1$ y $(z + 1)^n = 1$, demuestre que n es divisible 6 y que $z^3 = 1$

- P3.-**
- a) Demuestre que $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ con $k \in \{1, \dots, n-1\}$ y $n \geq 2$, es raíz del polinomio complejo $p(z) = 1 + z + \dots + z^{n-1}$. De esto deduzca que $p(z) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{i\frac{2k\pi}{n}})$ (podría servirle revisar la **P3c** de la auxiliar 14)
 - b) Use la parte anterior (le debería servir conjugando) para deducir que

$$\frac{n^2}{2^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

- c) Finalmente concluya que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

P4.- Considere el polinomio de coeficientes reales no nulos:

$$p(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- a) Demuestre que si p posee una raíz imaginaria pura, entonces $a_1^2 + a_0 a_3^2 = a_1 a_2 a_3$
- b) Si $a_3 = -8$, $a_2 = 24$, encuentre el valor que debe tener a_0 de modo que $x_0 = 2$ sea una raíz cuádruple.

P5.- Determine un polinomio cuadrático con coeficientes reales que admita como raíz

$$z_0 = \frac{i}{1 + i + \frac{i}{1-i+\frac{i}{1+i}}}$$

P6.- Sea $F : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$, definida para todo polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ de la forma $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ como $F(p) = \sum_{k=0}^n a_k$. Es decir, F es la función que a todo polinomio le asocia la suma de sus coeficientes.

- a) Estudie inyectividad y sobreyectividad de F .
- b) Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $F(p) = 0$. Encuentre $x \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 0$.

P7.- a) Considere el conjunto: $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$. Muestre que $(F, \odot)$, donde $\odot$ es la composición de funciones, es un grupo.

b) Considere ahora el conjunto $L = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal o afín no constante}\}$. Es decir, L es el conjunto de todas las funciones lineales biyectivas que van de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

P8.- Sea $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ un anillo con unidad, $x \in \mathcal{A}$ se dice *nilpotente* si $\exists n \in \mathbb{N}$, tal que $x^n = 0$. Demuestre:

- a) $1 - x$ nilpotente $\Rightarrow x$ es invertible para la segunda operación.
- b) En el anillo $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ vea que: $\mathbb{Z}_n$ tiene elementos nilpotentes $\iff n$ es divisible por el cuadrado de un natural $k > 1$

P9.- Muestre que en un cuerpo $(\mathcal{K}, +, \cdot)$, no es necesario exigir la conmutatividad de la primera operación. Traten de hacerla solos, y si no les resulta pidan un hint :-)

P10.- Calcule, $\forall n \in \mathbb{N}$, el valor de $\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j}$ y de $\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} (-1)^j$. A partir de los resultados anteriores calcule

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k}$$