

MA1101-8 Introducción al álgebra**Profesor:** Maya Stein**Auxiliar:** Juan d'Etigny S.**Auxiliar 14**

24 de agosto de 2018

Ejercicio de práctica: Encuentre las soluciones de la ecuación $w^n = -1$ **P1.-** Sean $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ las raíces n -ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento creciente)a) Demuestre que $S = w_0w_1 + w_1w_2 + \dots + w_{n-2}w_{n-1} + w_{n-1}w_0 = 0$

b) Demuestre la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\sum_{k=1}^n \overline{w_j^k} w_l^k = \begin{cases} 1, & \text{si } j = l \\ 0, & \text{si } j \neq l \end{cases}$$

c) Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Calcule $\sum_{j=0}^{n-1} (z + w_j)^n$ d) Sea w una raíz cúbica de la unidad con $w \neq 1$, demuestre que $(1 + w)^3 + (1 + w^2)^9 + (1 + w^3)^6 = 62$ **P2.-** Sea Ω_n el conjunto que contiene las n -ésimas raíces de la unidad, y sea M_n el conjunto que contiene todos los morfismos entre $(\mathbb{Z}_n, +)$ y $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.El objetivo de este problema es mostrar que: $|\omega_n| = |M_n|$:a) Sea $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un morfismo. Muestre que $f([k]) = f([1])^k$, y deduzca que $f([1])$ es raíz n -ésima de la unidad.b) Recíprocamente, muestre que si w es raíz n -ésima de la unidad, entonces $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $f([k]) = w^k$ está bien definida y es un morfismo.

c) Concluya

P3.- a) Considere $p(x) = 4x^4 - 2x^3 - 3$ y $d(x) = 2x^2 - 3$. Encuentre un par de polinomios $q, r \in \mathbb{R}[x]$ tales que $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$. con $gr(r) < gr(d)$.b) Sea $p(x) = x^5 + ax^2 + b$ y $q(x) = x^3 + cx + 1$. Determine los valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para que $q|p$.c) Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $(x - 1)|(x^n - 1)$.d) Sean $p, q, r \in \mathbb{R}[x]$ tales que $p(q - r) = q(p - r)$ y $gr(r) \geq 0$. Demuestre que $p = q$.**P4.-** Determinar $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio mónico de grado 3, que satisfaga las siguientes condiciones:

- $p(0) = p(2) = 0$
- El resto de dividir $p(x)$ por $(x - 1)$ es el mismo que el resto obtenido al dividir $p(x)$ por $(x - 3)$