

MA1101-8 Introducción al álgebra

Profesor: Maya Stein

Auxiliar: Juan d'Etigny S.



Auxiliar 12

11 de agosto de 2018

P1.- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

- a) Si $a \in A$ es un divisor de cero y $b \in A$ cualquiera, demuestre que si $a \cdot b \neq 0$, entonces $a \cdot b$ es divisor de cero.
- b) Demuestre que si el producto de dos elementos de A es un divisor de cero, entonces al menos uno de ellos es un divisor de cero.
- c) Demuestre que si $a \in A$ es divisor de cero, entonces a no tiene inverso.
- d) **Propuesto:** Pruebe que en $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ cada elemento que no tiene inverso multiplicativo, es un divisor del cero.

P2.- Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ como:

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

- a) Demuestre que $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es un cuerpo.
- b) Muestre que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

P3.- Considere un anillo $(A, +, \cdot)$ que es conmutativo, con unidad y además $|A|$ es finito. Sea $x \in A$, no invertible y distinto de 0:

- a) Muestre que $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^k \neq 1$
- b) Muestre que $\exists n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, distintos, tales que $x^n = x^m$
- c) Muestre que $\exists r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tales que $x^s(1 - x^r) = 0$
- d) Concluya que x es divisor del cero.

P4.- Considere en $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones: $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ y $(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$

- a) Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con unidad.
- b) Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ posee divisores del cero.
- c) Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ no es isomorfo a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

P5.- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo finito, con unidad y sin divisores de cero.

a) Pruebe que $\exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p \text{ veces}} = 0$

b) Pruebe que si $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a \cdot b \text{ veces}} = 0 \Rightarrow \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a \text{ veces}} = 0 \wedge \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{b \text{ veces}} = 0$$