

P4 Si: $HK = \{h \cdot k \mid h \in H, k \in K\}$, queremos probar:

$$HK \leq G \iff HK = KH$$

$\Rightarrow$ Vamos a suponer que $HK \leq G$ para ver que $HK = KH$ por doble inclusión.

$\supseteq$ Sea $a \in KH \Rightarrow a = k \cdot h$ con $k \in K$ y $h \in H$

$\Rightarrow a^{-1} = h^{-1} \cdot k^{-1} \in HK$, pues H y K al ser grupos permiten decir que $h^{-1} \in H$ y $k^{-1} \in K$

Como HK es grupo y $a^{-1} \in HK \Rightarrow (a^{-1})^{-1} \in HK$
 $\Rightarrow a = (a^{-1})^{-1} \in HK$, que dice $[a \in KH \Rightarrow a \in HK]$

$\subseteq$ Si: $b \in HK \Rightarrow b^{-1} \in HK$ (por ser grupo)

$$\Rightarrow \exists h \in H, k \in K; b^{-1} = h \cdot k \Rightarrow b = (b^{-1})^{-1} = \underbrace{(k^{-1})^{-1} \cdot (h^{-1})^{-1}}_{KH}$$

$$\therefore HK = KH$$

$\Leftarrow$ Suponemos ahora que $HK = KH$. Para ver que HK es subgrupo de G , usaremos la Caracterización Común:

$$\begin{aligned} \text{Sean } a, b \in HK &\Rightarrow a = h \cdot k, b = x \cdot y; h, x \in H \wedge k, y \in K \\ &\Rightarrow x^{-1} \in H \wedge k \cdot y^{-1} \in K \Rightarrow (k \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} \in KH \end{aligned}$$

Pero sabiendo que $KH = HK \Rightarrow \exists u \in H \wedge v \in K; (k \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} = u \cdot v$

Con esto podemos concluir que:

$$\begin{aligned} a \cdot b^{-1} &= (h \cdot k) \cdot (x \cdot y)^{-1} = h \cdot (k \cdot y^{-1} \cdot x^{-1}) = h \cdot (u \cdot v) \\ &= (h \cdot u) \cdot v \end{aligned}$$

Como $h \wedge u \in H \Rightarrow h \cdot u \in H \Rightarrow (h \cdot u) \cdot v \in HK$

Así $\forall a, b \in HK, a \cdot b^{-1} \in HK \Leftrightarrow HK \leq G$.

Nota: Este resultado es una versión más fuerte de un resultado que comúnmente se encuentra:
 $[G \text{ abeliano} \Rightarrow HK \leq G]$

Suerte con el estudio!!