MA1101-8 Introducción al álgebra
Profesor: Maya Stein
Auxiliar: Juan d'Etigny S.

Auxiliar 11

3 de agosto de 2018

P1.- Dado un conjunto A no vacío, sea $F = \{f : A \to A \,|\, \text{f es función}\}$ y conidere $h : A \to A$ una función biyectiva fija. Se define en F la operación $*$ por:

$$\forall f, g \in F : \quad f * g = f \circ h \circ g$$

Donde en este caso $\circ$ es la composición de funciones.

a) Demuestre que $(F, *)$ es una estructura algebraica asociativa y encuentre el elemento neutro.

b) Determine que elementos de F son invertibles y encuentros sus inversos

P2.- Sea $(A, *)$ una estructura con $*$ lci. asociativa, y $a \in A$ un elemento fijo. Se define el conjunto $B = \{x \in A : a * x = x * a\}$. Demuestre que:

a) $\forall x, y \in B : \ (x * y) \in B$.

b) Si para $*$ existe neutro $e \in A$, entonces $e \in B$.

c) Si $x \in B$ tiene inverso $x^{-1} \in A$ para $*$, entonces $x^{-1} \in B$

P3.- *a*) Considere los grupos $(H, *)$ y $(K, \triangle)$. Demuestre que $(H \times K, \circ)$ es grupo donde la lci. $\circ$ se define por

$$\forall (h_1, k_1),\ (h_2, k_2) \in H \times K,\ \ (h_1, k_1) \circ (h_2, k_2) = (h_1 * h_2, k_1 \triangle k_2)$$

b) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $(H_1, *)$, $(H_2, *)$ subgrupos de este. Se define el conjunto

$$L = \{h_1 * h_2 \,|\, h_1 \in H_1 \wedge h_2 \in H_2\}$$

Pruebe que $(L, *)$ es subgrupo de $(G, *)$

c) Demuestre que si $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, entonces $(L, *)$ y $(H_1 \times H_2, \circ)$ son isomorfos.

P4.- Si $(G, \cdot)$ es un grupo y $H, K \subseteq G$ son subgrupos de este. Definimos

$$HK = \{h \cdot k \,|\, h \in H,\ k \in K\}$$

Demuestre que HK es subgrupo de G ssi $HK = KH$.

P5.- Propuesto: Sea $(G, *)$ un grupo no necesariamente abeliano con neutro e.

a) Para $a \in G$, se define la función $h_a : G \to G$, tal que $h_a(x) = a * x * a^{-1}$. Pruebe que $\forall a \in G,\ \ h_a$ es un isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.

b) Se definen los conjuntos $A = \{f : G \to G \mid f$ es un isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)\}$ y $B = \{g : G \to G \mid g$ es biyectiva. Demuestre que $(A, \circ)$ es subgrupo de $(B, \circ)$, donde $\circ$ es la composición de funciones.

c) Pruebe que la función $\varphi : (G, *) \to (A, \circ)$ definida por $\varphi(a) = h_a$ para cada $a \in A$, es un homeomorfismo (acá consideramos A y h_a como se definió en las partes anteriores).

d) De un ejemplo de grupo $(G, *)$, (o una condición que se deba cumplir) para que la función φ resulte constante