MA1101-8 Introducción al álgebra
Profesor: Maya Stein
Auxiliar: Juan d'Etigny S.

Auxiliar 10

13 de julio de 2018

P1.- Se define el conjunto $\mathcal{D} = \{(m, n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \mid m \cdot n \in \mathbb{Z}\}$. Demuestre que $\mathcal{D}$ es numerable.

P2.- *a*) Sean A, B, C conjuntos infinitos tales que:

$$A \cap B = \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset, \quad |B| = |C|$$

Demuestre que $|A \cup B| = |A \cup C|$

P3.- Sean $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$, tales que $x_1 \equiv_n x_2 \wedge y_1 \equiv_n y_2$. Entonces:

$$(x_1 + y_1) \equiv_n (x_2 + y_2) \quad \wedge \quad (x_1 \cdot y_1) \equiv_n (x_2 \cdot y_2)$$

Si $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/\equiv_n$, concluya, que si se definen $+_n$ y $\cdot_n$ como

$$[x]_n +_n [y]_n = [x + y]_n \quad \wedge \quad [x]_n \cdot_n [y]_n = [x \cdot y]_n$$

Entonces estas operaciones, definen una *lci.* sobre $\mathbb{Z}_n$

P4.- Sean $(A, *)$ y $(B, \triangle)$ estructuras algebraicas con neutros e_A y e_B respectivamente. Supongamos que todos los elementos son invertibles. Un homomorfismo $f : (A, *) \to (B, \triangle)$ es un monomorfismo, si y solo si $f^1(\{e_B\}) = \{e_A\}$.

P5.- Sea $\mathcal{F} := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$. Sea define en $\mathcal{F}$ una *lci.* $*$ por:

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demuestre que:

a) $*$ es conmutativa.

b) $(\mathcal{F}, *)$ posee elemento neutro. Encuéntrelo.

c) $*$ distribuye con respecto a la suma de funciones: $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$