P1

a) Queda para el alumno chequear que la relación es en efecto refleja, simétrica, transitiva y <u>No</u> es antisimétrica (debería ser fácil).

b) La condición hace que al reducir las palabras quitando ab's (= ba's), siempre quedará una palabra compuesta por el excedente de letras que aparece más veces en la original (sea a v b). Dicho de otra forma, si

$\mathcal{L} : \{a,b\}^* \to \mathbb{Z}$; $\mathcal{L}(w) = (\#$ de a's $\in w) - (\#$ de b's $\in w)$

Así, la reducción de w será una palabra de $|\mathcal{L}(w)|$ a's si $\mathcal{L}(w) > 0$, una palabra de $|\mathcal{L}(w)|$ b's si $\mathcal{L}(w) < 0$, o la palabra vacía si $\mathcal{L}(w)$

El hecho de que las reducciones quedan de una letra se puede chequear por contradicción, que se fuerza de inmediato suponiendo que hay por lo menos una a y una b en la palabra!

Con todo esto tenemos la forma de

$[w]_R = \{x \in \{a,b\}^* \mid wRx\} = \{x \in \{a,b\}^* \mid \mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(x)\}$

$\Rightarrow \{a,b\}^*/_R = \{\mathcal{L}^{-1}(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(Esto además es $= \{[w]_R \mid w = a^k \vee w = b^k$, con $k \in \mathbb{N}\}$)

$a^0 = b^0 = V$

c) Vimos que con la condición $ab=ba$, se tenía que la reducción de las palabras quedaba en a^k v b^k. Ahora, si a^2 y b^2 se va eliminando, tendremos que la reducción de las palabras será $=a$ (si k impar) $=b$ (si k impar), o $=v$ (siempre que k par)

$$\Rightarrow \{a,b\}^*/_R = \{\mathcal{L}^{-1}(1), \mathcal{L}^{-1}(-1), \mathcal{L}^{-1}(0)\}$$

todas las palabras con más a's que b's, con excedente impar

Lo mismo que el anterior pero con b's en vez de a's

Palabras con misma cantidad de a's que b's, o donde el excedente de una sobre la otra es par

Defina $\mathcal{L}$ usted! (es un poco distinta a $\mathcal{L}$)

P2)

a) Queremos ver si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de saturados, entonces la unión y la intersección de estos también lo es:

$$\text{Si } x \in \bigcup_{i\in I} X_i \iff x\in X_1 \vee x\in X_2 \vee \dots \iff \exists j\in I;\ x\in X_j \overset{\text{Son saturados!}}{\Rightarrow} \exists j\in I;\ [x]_R \subseteq X_j$$

$$\Rightarrow [x]_R \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$$

Además si $y \in \bigcap_{i \in I} X_i \Leftrightarrow \forall i \in I, y \in X_i \Rightarrow \forall i \in I, [y]_R \subseteq X_i$

$\Rightarrow [y]_R \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i$

$\therefore \bigcap_{i \in I} X_i$ y $\bigcup_{i \in I} X_i$ son saturados

b)

$\Leftarrow)$ $A = \bigcup_{g \in G} [g]$; $G \subseteq E$. Luego $x \in A \Rightarrow \exists g \in G ; x \in [g]$

$\Rightarrow [x] = [g] \Rightarrow [x] \subseteq \bigcup_{g \in G} [g] = A$.

$\Rightarrow)$ Supongamos que A es saturado, pero no es unión de clases de equivalencia. Al NO ser unión de clases de E., tenemos que existen valores en A cuyas clases de equivalencia no estarían completamente contenidas en A (si es que no existieran valores así, A estaría completamente determinado por clases de equivalencia).

$\times$ pues A es saturado

P3

La demostración típica la pueden ver en el libro del curso.

Otra versión:

Primero notamos que $0 \leq \sum_{k=0}^{n} k^2$. Además $1 \leq n, 2 \leq n, \ldots, n \leq n$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} n^2 = n^2 \sum_{k=1}^{n} 1 = n^3$$

Así $0 \leq \sum_{k=0}^{n} k^2 \leq n^3$. Se postula que $\sum_{k=0}^{n} k^2$ = Polinomio de grado 3, $\forall n \in \mathbb{N}$

(Chequee por contradicción que no puede ser de mayor grado)

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k^2 = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$$

Si $n = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = a_0$

Además de $n=1$, $n=2$ y $n=3$, quedamos con las ecuaciones:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 5, \quad 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 14$$

Al resolver

$$\Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{2} \text{ y } a_1 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k^2 = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 = \frac{1}{6} n + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3$$

$$= \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad //$$

P4 Partamos por el bonus:

Queremos ver como se ve la suma de números impares, pero nos podemos apoyar en el siguiente dibujo

$n=1$
$$\begin{array}{c} 1 \end{array}$$

$n=2$
$$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$$

$n=3$
$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{array}$$

$n=4$
$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}$$

donde vemos que la suma nos va dando el número de impares al cuadrado. Con esto postulamos que

$\sum_{\{n \text{ primeros impares}\}} a_k = n^2$. El caso base de la inducción es directo.

Supongamos como caso base que la suma de los primeros n números impares es $= n^2$. Recordamos que el $n+1$-ésimo número impar es $2(n+1)-1 = 2n+2-1 = 2n+1$.

Luego, $\sum_{\{n+1 \text{ n}^{\circ}\text{'s impares}\}} a_k = \sum_{\{n \text{ n}^{\circ}\text{'s impares}\}} a_k + 2n+1 = \underbrace{n^2}_{HI.} + 2n+1 = (n+1)^2$ //