

MA1101-8 Introducción al álgebra

Profesor: Maya Stein

Auxiliar: Juan d'Etigny S.



Trabajo dirigido

25 de junio 2018

P1.- Sea $\{a, b\}^*$ el conjunto de palabras que se escriben con a 's y con b 's. Por ejemplo, $aaab$, $babaa$, $baabbb$, etc. Suponga que cada vez que tenga una palabra que contiene ab , usted puede borrar este término. Por ejemplo:

$$\underline{ab} bbaaa \rightarrow bbaaa, \quad \underline{ababab} \rightarrow \text{palabra vacía} =: v, \quad \underline{ab} a \underline{ab} \rightarrow a$$

Estudie la relación:

- $\forall w, v \in \{a, b\}^*, w \mathcal{R} v \iff$ al eliminar todos los términos ab posibles se obtiene, en ambos casos, la misma palabra.
- Agregue el hecho que, además de borrar ab , se verifica $ab = ba$. Estudie de nuevo la relación anterior y determine el conjunto cociente $\{a, b\}^*/\mathcal{R}$.
- Considere ahora que las reglas en $\{a, b\}^*$ son: $a^2 = a \cdot a$, $b^2 = b \cdot b$ son eliminables y, además, $ab = ba$. Estudie $\mathcal{R}$, el conjunto cociente, etc.

P2.- Sea E un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en E . Sea $\emptyset \neq A \subseteq E$. Se dice que A es "saturado" para $\mathcal{R}$ si y solo si $\forall x \in A, [x] \subseteq A$.

- Demuestre que si $\{X_i\}_{i \in I}$, $I \neq \emptyset$, es una familia de partes saturadas de E , entonces $\cup_{i \in I} X_i$ y $\cap_{i \in I} X_i$ son saturados.
- Demuestre que A es saturado si y solo si A es la unión de clases de equivalencia según $\mathcal{R}$.

P3.- Intente reproducir la demostración de la identidad

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Vista en clases (en el apunte), tratando de consultarla lo menos posible.

Bonus: ¿Se le ocurre/conoce un método alternativo para demostrarlo? Investigue.

P4.- Encuentre una expresión para la suma de los primeros n números impares. **Bonus:** Intente hacerlo sin utilizar la expresión $\sum_{k=0}^n = \frac{n(n+1)}{2}$.

P5.- Demuestre por inducción las siguientes expresiones:

a) La suma $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i (2i+1)$ es proporcional a n y determine la constante de proporcionalidad

b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

c) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{(-4)^n}\right)$

P6.- Resuelva las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=0}^n k 2^k$

b) $\sum_{k=0}^n k \cdot k!$

c) $\sum_{i=5}^n \sum_{j=1}^i \frac{i+1}{j(j+1)}$

d) $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \left(k + \frac{2^j}{j}\right)$

e) $\sum_{i=1}^n 2^{i+1} \left(\frac{i}{(i+1)(i+2)}\right)$

f) $\sum_{i=\left(\frac{m(m-1)}{2}-1\right)}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$