P4)

Se define la relación $\alpha \mathcal{R} \alpha' \Leftrightarrow (\forall B' \in \alpha')(\exists B \in \alpha);\ B' \subseteq B$

a) PDQ: $\mathcal{R}$ es de orden.

1) Refleja: Notamos que $\forall B \in \alpha$, se tiene que $B = B$

$\Rightarrow (\forall B \in \alpha)(\exists \bar{B} \in \alpha);\ B \underset{(\subseteq)}{=} \bar{B} \Rightarrow \alpha \mathcal{R} \alpha$, y así sigue que es refleja.

2) Antisimetría: Sean $\alpha, \alpha' \in D(A);\ \alpha \mathcal{R} \alpha' \wedge \alpha' \mathcal{R} \alpha$

$\alpha \mathcal{R} \alpha' \Leftrightarrow (\forall B' \in \alpha')(\exists B \in \alpha);\ B' \subseteq B$ (1)

$\alpha' \mathcal{R} \alpha \Leftrightarrow (\forall C \in \alpha)(\exists C' \in \alpha');\ C \subseteq C'$ (2)

Ahora, consideramos $B' \in \alpha'$. Por (1) $\exists B \in \alpha;\ B' \subseteq B$. A su vez, existe $B'' \in \alpha';\ B \subseteq B''$ (por (2))

$\Rightarrow B' \subseteq B \subseteq B''$. Pero como α, α' son particiones,

$B' \subseteq B'' \Rightarrow B' = B''$ (al ser partición, $B' \neq B'' \Rightarrow B' \cap B'' = \emptyset$)

$\Rightarrow B = B' = B''$. Así $\forall B' \in \alpha', \exists B \in \alpha;\ B = B'$ (ie: $\alpha' \subseteq \alpha$)

Se puede probar de forma similar que $\alpha \subseteq \alpha'$

Con esto tenemos que $\alpha \mathcal{R} \alpha' \wedge \alpha' \mathcal{R} \alpha \Rightarrow \alpha \subseteq \alpha' \wedge \alpha' \subseteq \alpha$

$\Leftrightarrow \alpha = \alpha'$

Con esto tenemos que $\mathcal{R}$ es ~~[illegible]~~ antisimétrica.

3) <u>transitividad</u>: Sean $\alpha, \alpha', \alpha'' \in D(A)$; $\alpha \mathcal{R} \alpha' \wedge \alpha' \mathcal{R} \alpha''$.

Sea $B'' \in \alpha''$. Como $\alpha' \mathcal{R} \alpha'' \Rightarrow \exists B' \in \alpha'; B'' \subseteq B'$.

Ahora, como $B' \in \alpha'$ y $\alpha \mathcal{R} \alpha' \Rightarrow \exists B \in \alpha; B' \subseteq B$

$\Rightarrow \forall B'' \in \alpha'', \exists B \in \alpha; B'' \subseteq B \Leftrightarrow \alpha \mathcal{R} \alpha''$ (es transitiva)

$\therefore$ $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

b) Consideramos $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ (tiene más de 3 elementos).

Ahora, como $D(A)$ es el conjunto de <u>TODAS</u> las particiones,
$\exists \alpha_1, \alpha_2 \in D(A); (\{a_1\}, \{a_2, a_3\} \in \alpha_1) \wedge (\{a_3\}, \{a_1, a_2\} \in \alpha_2)$

Pero $\alpha_1 \not\mathcal{R} \alpha_2$, pues $\nexists B \in \alpha_2; \{a_1, a_3\} \subseteq B$ y al mismo tiemo $\nexists B' \in \alpha_1; \{a_1, a_2\} \subseteq B'$

teniendo que no se tiene ni $\alpha_1 \mathcal{R} \alpha_2$ ni $\alpha_2 \mathcal{R} \alpha_1$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ es un orden parcial.