MA1101-8 Introducción al álgebra
Profesor: Maya Stein
Auxiliar: Juan d'Etigny S.

Auxiliar 7

4 de mayo de 2018

Sea $\mathcal{R}$ una relación definida en un conjunto $A \neq \emptyset$:

- $\mathcal{R}$ se dice **refleja** si y solo si $(\forall x \in A): \ x\mathcal{R}x$
- $\mathcal{R}$ se dice **simétrica** si y solo si $(\forall x, y \in A): \ x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$
- $\mathcal{R}$ se dice **antisimétrica** si y solo si $(\forall x, y \in A): \ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
- $\mathcal{R}$ se dirá **transitiva** si y solo si $(\forall x, y, z \in A): \ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Ejercicio de práctica: Sea $A = \{1,2,3,4\}$. Consideremos la relación $\mathcal{R}$ sobre A definida por:

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,2),(1,3),(2,4),(1,4),(4,4)\}$$

Determine si $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica, antisimétrica o transitiva

P1.- Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre A. Diremos que $\mathcal{R}$ es **circular** si satisface:

$$(\forall x, y, z \in A): \ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow z\mathcal{R}x$$

Demuestre que si $\mathcal{R}$ es refleja y circular, entonces es de equivalencia.

P2.- Sea $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N}$, el conjunto de $n-$tuplas de números naturales.

$$(\forall X, Y \in \mathbb{N}^n): \ X\mathcal{R}Y \iff (x_1 \leq y_1) \wedge (x_1 + x_2 \leq y_1 + y_1) \wedge ... \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

Demuestre que la relación es de orden.

P3.- Sea E un conjunto no vacío. Sea $\mathcal{P}$ una relación refleja y transitiva definida sobre E. Se define una nueva relación $\mathcal{R}$ sobre E por: $a\mathcal{R}b \iff a\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}a$.

a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Sea $E/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} |\ a \in E\}$, donde $[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in E |\ a\mathcal{R}b\}$:

- Pruebe que, si $a_1 \in [a]_{\mathcal{R}} \wedge b_1 \in [b]_{\mathcal{R}}$, entonces $a\mathcal{P}b \iff a_1\mathcal{P}b_1$

- **Propuesto:** Se define la relación Q sobre $E/\mathcal{R}$ por: $[a]_{\mathcal{R}} Q [b]_{\mathcal{R}} \iff a\mathcal{P}b$. Pruebe que esta es de orden sobre $E/\mathcal{R}$

P4.- Sea A un conjunto no vacío con n elementos. Sea $D(A)$ el conjunto que contiene todas las particiones de A. Definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre $D(A)$ como:

$$\alpha \mathcal{R} \alpha' \iff (\forall B' \in \alpha')(\exists B \in \alpha);\ B' \subseteq B$$

a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $D(A)$.

b) Pruebe que si A tiene más de 3 elementos, entonces $\mathcal{R}$ es un orden parcial.

P5.- Propuesto: Sea A un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función biyectiva. Para $n \geq 1$ se define $f^{(n)}$ como la composición de f consigo misma n veces. Si $n < 0$, definimos $f^{(n)} = (f^{-1})^{|n|}$. Si $n = 0$, diremos que $f^{(0)} = id_A$. Se define en A la relación Ω mediante

$$x \Omega y \iff (\exists n \in \mathbb{Z}) :\ f^{(n)}(x) = y$$

a) Probar que Ω es una relación de equivalencia.

b) Consideremos un $p \neq 0 \in \mathbb{N}$ fijo. Si $A = \mathbb{Q}$, y se define $f(q) = q \cdot p$. Calcule la clase de equivalencia de 0 y 1 con respecto a Ω definido con esta función.

P6.- Propuesto:

a) Se define en $\mathbb{R}$ la relación Ψ dada por $x \Psi y \iff (y - x) \in \mathbb{N}$.

1) Demuestre que Ψ es una relación de orden
2) Indique si es o no una relación de orden total. Justifique

b) Considere ahora la relación Φ definida en $\mathbb{R}$ como $x \Phi y \iff (y - x) \in \mathbb{Z}$.

1) Demuestre que la relación es de equivalencia
2) Dado $p \in \mathbb{Z}$, calcule la clase de equivalecia $[p]_{\Phi}$
3) Demuestre que el conjunto cuociente de la relación es $\{[x]_{\Phi} |\ x \in [0, 1)\}$