

P2 P.D.Q:

$$a) (A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$$

usamos la definición de Δ :

$$(A \Delta B) \cup (B \Delta C)$$

$$\equiv [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c] \cup [(B \cup C) \cap (B \cap C)^c]$$

distribuímos y queda:

$$\underbrace{[(A \cup B) \cap (A \cap B)^c] \cup (B \cup C)}_{(1)} \cap \underbrace{[(A \cup B) \cap (A \cap B)^c] \cup (C \cap B^c)}_{(2)}$$

(1): distribuímos de nuevo para llegar a

$$[(A \cup B) \cup (B \cup C)] \cap [(A^c \cup B^c) \cup (B \cup C)]$$

$$\underbrace{(A \cup B \cup C)} \cap \underbrace{(A^c \cup \overset{E}{B^c \cup B} \cup C)} = (A \cup B \cup C) \cap E$$
$$= (A \cup B \cup C)$$

De la misma forma distribuímos y llegamos a que:

$$(2): [(A \cup B) \cup (C^c \cup B^c)] \cap [(A^c \cup B^c) \cup \underbrace{(C^c \cup B^c)}_E]$$

$$(E \cup A \cup C^c) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c)$$

$$= E \cap (A \cap B \cap C)^c = (A \cap B \cap C)^c$$

Luego concluimos el resultado, pues

$$\begin{aligned}(A \Delta B) \cup (B \Delta C) &= (1) \cap (2) \\ &= (A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)^c \\ &= (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

P3 Consideremos la definición de "Álgebra" que aparece en el enunciado y demostremos:

a) Si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(E)$ álgebra demuestre que

$$\forall A, B \in \mathcal{X} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{X}$$

El primer paso es recordar que $\forall A \in \mathcal{X}, A^c \in \mathcal{X}$ significa que si $A^c \in \mathcal{X} \Rightarrow (A^c)^c = A \in \mathcal{X}$.

Con esto, veremos que $(A \Delta B)^c \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}\text{Ahora, } (A \Delta B)^c &= ((A \cup B) \cap (B \cap A)^c)^c \\ &= \underbrace{(A \cup B)^c}_{(1)} \cup \underbrace{(B^c \cup A^c)^c}_{(2)}\end{aligned}$$

(1) $\in \mathcal{X}$, pues si $A, B \in \mathcal{X} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{X} \Rightarrow (A \cup B)^c \in \mathcal{X}$.

(2) $\in \mathcal{X}$, pues si $A, B \in \mathcal{X} \Rightarrow A^c, B^c \in \mathcal{X} \Rightarrow B^c \cup A^c \in \mathcal{X} \Rightarrow (B^c \cup A^c)^c \in \mathcal{X}$

$$\Rightarrow (1) \cup (2) \in \mathcal{X}$$

$$\Rightarrow (A \Delta B)^c \in \mathcal{X} \Rightarrow (A \Delta B) \in \mathcal{X}$$

b) Queremos saber si para $E = \{1, 2, 3, 4\}$ cto. de referencia, la colección $M := \{\emptyset, E, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}\}$ será álgebra.

La respuesta es NO, pues si bien M cumple el 1er requisito, este no cumple los otros. Basta notar que $\{1\}, \{3, 4\} \in M$ pero $\{1\} \cup \{3, 4\} = \{1, 3, 4\} \notin M$.

Un ejemplo de álgebra en E sería

$$M = \{\emptyset, E, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

¿Puedes pensar en otros ejemplos?

$$c) \text{ P.D.R: } \mathcal{X} \text{ es álgebra} \Leftrightarrow (\forall A, B \in \mathcal{X}), A^c \cap B^c \in \mathcal{X}$$

$\Rightarrow$ Si $\mathcal{X}$ es álgebra, entonces $\forall A, B \in \mathcal{X}$ se tiene que $(A \cup B) \in \mathcal{X} \Rightarrow (A \cup B)^c \in \mathcal{X}$ pero $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$,

$\Leftarrow$ Queremos ver que $\mathcal{X}$ cumpla todos los requisitos de ser un álgebra:

(.) Primero, por hipótesis $\emptyset \in \mathcal{X}$
 $\Rightarrow (\emptyset)^c \cap (\emptyset)^c \in \mathcal{X}$ (por la propiedad que estamos suponiendo)

$$\Rightarrow E \cap E = E \in \mathcal{X}$$

Luego $\emptyset, E \in \mathcal{X}$ y tenemos el primer requisito.

(..) El segundo requisito es ver que $\forall A \in \mathcal{X}, A^c \in \mathcal{X}$
pero por la propiedad $\forall A \in \mathcal{X}, A^c \cap A^c \in \mathcal{X}$
 $\Rightarrow A^c \in \mathcal{X}.$

(...) El último requisito es que $\forall A, B \in \mathcal{X}, A \cup B \in \mathcal{X}$

Pero la propiedad nos dice que

$$\forall A, B \in \mathcal{X}, A^c \cap B^c \in \mathcal{X} \Leftrightarrow (A \cup B)^c \in \mathcal{X}.$$

Pero ya sabemos que si $(A \cup B)^c \in \mathcal{X} \Rightarrow ((A \cup B)^c)^c \in \mathcal{X}$
 $\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{X}.$

Luego como $\mathcal{X}$ cumple (.), (..), (...) $\Rightarrow$ es álgebra.

Cualquier duda por el foro!!
Suerte en el estudio!!

