

P1

a) PDA: $(\forall n \geq 1) \quad 3^n + 4^n - 1$ es divisible por 3

CB (n=1): $3^1 + 4^1 - 1 = 6$, que es claramente divisible por 3.

Ahora suponemos como HI que $(3^k + 4^k - 1)$ es divisible por 3. Veamos el caso $3^{k+1} + 4^{k+1} - 1$:

$$\begin{aligned} 3^{k+1} + 4^{k+1} - 1 &= 3 \cdot 3^k + 4 \cdot 4^k - 1 = (2+1) \cdot 3^k + (3+1) \cdot 4^k - 1 \\ &= 2 \cdot 3^k + 3 \cdot 4^k + [3^k + 4^k - 1] = 3 \underbrace{(2 \cdot 3^{k-1} + 4^k)}_{(1)} + \underbrace{(3^k + 4^k - 1)}_{(2)} \end{aligned}$$

(1) es div. por 3 por tener la forma $3 \cdot (\dots)$

(2) es div. por 3 gracias a la hipótesis inductiva

$\Rightarrow 3^{k+1} + 4^{k+1} - 1$ es divisible por 3.

b) PDA: $(\forall n \in \mathbb{N}), (4^{2n+1} + 3^{n+2})$ es divisible por 13.

CB (n=0): $4^{2 \cdot 0 + 1} + 3^{0+2} = 4 + 3^2 = 13$, que es div. por 13.

Queremos probar ahora que $4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2}$ ~~es divisible por 13~~
~~que~~ es divisible por 13, suponiendo como cierto
que $4^{2k+1} + 3^{k+2}$ es div. por 13 (HI)

Notamos que $4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2} = 4^2 \cdot 4^{2k+1} + 3 \cdot 3^{k+2}$

$$= 16 \cdot 4^{2k+1} + 3 \cdot 3^{k+2} = (13+3) \cdot 4^{2k+1} + 3 \cdot 3^{k+2}$$

$$= \underbrace{13 \cdot 4^{2k+1}}_{\text{claramente div. por 13}} + 3 \underbrace{(4^{2k+1} + 3^{k+2})}_{\text{div. por 13 (HI)}}$$

$\Rightarrow 4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2}$ es divisible por 13 //

P2 | PQR: $(\forall n \geq 2), n^2 \geq 2n!$

CB ($n=2$): $2^2 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot (2 \cdot 1) = 2 \cdot 2!$, y así el caso base cumple la desigualdad.

Supongamos que $k^k \geq 2 \cdot k!$ se cumple, y probemos que $(k+1)^{(k+1)} \geq 2 \cdot (k+1)!$ es cierta:

Vemos que $2 \cdot (k+1)! = 2 \cdot (k+1) \cdot k! = (k+1) \cdot 2 \cdot k!$, con lo que podemos usar la HI para notar que $(k+1)2k! \leq (k+1) \cdot k^k$. Pero notamos que

$$k < k+1 \Rightarrow k^k < (k+1)^k \Rightarrow (k+1) \cdot k^k \leq (k+1) \cdot (k+1)^k = (k+1)^{k+1}$$

Así concluimos que $(k+1)^{(k+1)} \geq 2 \cdot (k+1)!$ //

$$b) \text{ PDA: } (2n)! < 2^{2n} (n!)^2 \quad (\forall n \geq 1)$$

$$\text{CB } (n=1): (2 \cdot 1)! = 2 < 4 = 2^{2 \cdot 1} = 2^{2 \cdot 1} \cdot (1!)^2$$

Suponiendo que $(2k)! < 2^{2k} \cdot (k!)^2$ es válido (HI), vemos que:

$$(2(k+1))! = (2k+2)! = (2k+2)(2k+1) \cdot (2k)!$$

$$\text{Pero por HI} \Rightarrow < (2k+2) \cdot (2k+1) \cdot 2^{2k} (k!)^2$$

$$= 2(k+1) \cdot (2k+1) 2^{2k} (k!)^2$$

$$(*) = (k+1) \cdot (2k+1) \cdot 2^{2k+1} \cdot (k!)^2$$

Ahora, sabiendo que $2k+1 < 2k+2$

$$\Rightarrow (*) < (k+1) \cdot (2k+2) \cdot 2^{2k+1} \cdot (k!)^2$$

$$= (k+1) \cdot (k+1) \cdot 2^{2k+2} \cdot (k!) \cdot (k!)$$

$$= 2^{2k+2} \cdot (k+1) \cdot (k!) \cdot (k+1) \cdot (k!)$$

$$= 2^{2k+2} ((k+1)!)^2$$

$\Rightarrow (2(k+1))! < 2^{2(k+1)} \cdot ((k+1)!)^2$, que es lo que buscábamos.

P3] P.D.Q: $(\forall n \geq 1), U_n = \frac{3(3^n - 1)}{3^{n+1} - 1}$

CB $(n=1)$: $4 = \frac{3}{U_1} \Rightarrow U_1 = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3(3-1)}{3^2-1}$ "

Suponemos como HI que $U_k = \frac{3(3^k - 1)}{3^{k+1} - 1}$

Sabemos por la definición de la recurrencia que $4 = U_k + \frac{3}{U_{k+1}}$, y queremos ver que $U_{k+1} = \frac{3(3^{k+1} - 1)}{3^{(k+1)+1} - 1}$

Ahora, $4 - U_k = \frac{3}{U_{k+1}}$ y utilizando la HI, tenemos

$$4 - \frac{3(3^k - 1)}{3^{k+1} - 1} = \frac{3}{U_{k+1}}$$

$$= \frac{4(3^{k+1} - 1) - 3(3^k - 1)}{3^{k+1} - 1} = \frac{4 \cdot 3^{k+1} - 4 - 3^{k+1} + 3}{3^{k+1} - 1}$$

$$= \frac{3 \cdot 3^{k+1} - 1}{3^{k+1} - 1} = \frac{3^{k+2} - 1}{3^{k+1} - 1} = \frac{3}{U_{k+1}} \Rightarrow U_{k+1} = \frac{3(3^{k+1} - 1)}{3^{(k+1)+1} - 1} //$$

$$PDA: (\forall n \geq 1), 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

$$CB (n=1) \quad 1 = 2 - \frac{1}{1} \quad \text{Not A}$$

Notemos que en el problema, al aumentar el n , estoy aumentando la cantidad de términos que sumo, al mismo tiempo que la cota se va "pareciendo" más a 2, lo que nos parecería indicar que si uno sigue al infinito, la suma estaría acotada siempre por 2!!

$$\text{Suponemos como HI que } 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$$

$$\text{y queremos ver si } 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$\text{Pero } 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \left(2 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{(k+1)^2} \quad (\text{por HI}).$$

$$\text{pero además } \left(2 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 + \frac{k - (k+1)^2}{k(k+1)^2} = \frac{k - (k^2 + 2k + 1)}{k(k+1)^2} + 2$$

$$= - \left[\frac{k^2 + k + 1}{k^2 + k} \right] \cdot \frac{1}{k+1} + 2 \quad (*) \quad \text{Notando que}$$

$$k^2 + k + 1 > k^2 + k \Rightarrow - \left[\frac{k^2 + k + 1}{k^2 + k} \right] < -1 \Rightarrow (*) < 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1} //$$