

Pregunta 5 auxiliar 1:

a) Se fija una persona $p \in F$ que valida la proposición cuantificada

$$(1) (\forall x \in F) (\varphi(x, p) \vee x = p)$$

Lo que se lee como "toda persona en la fila (dígase 'x') cumple que está delante de p o es =p"

O también se puede frasear como "toda persona en la fila que no es p, está delante de este".

Luego la única persona que valida (1) es el último en F.

Ahora, en qué posición está p si valida

$$(2): (\exists! x \in F) (\varphi(x, p) \vee \varphi(p, x)) ?$$

(2) dice: "p cumple que tiene o exactamente una persona en frente de el, o está ~~en~~ en frente exactamente de una persona"

Así p será o la segunda persona en la fila o la penúltima

b) Nos interesa negar las proposiciones (1) y (2):

Para (1) recordamos que p al ser el último nos dice que la negación de la proposición debe decirnos " p NO es el último", (*) en efecto

$$\neg [(\forall x \in F)(\varphi(x, p) \vee x = p)] = (\exists x \in F)(\neg \varphi(x, p) \wedge x \neq p)$$

Ahora, notamos que $\neg \varphi(x, p) = "x$ NO está ~~delante~~ delante de $p"$ $\Leftrightarrow "x$ está detrás de p , o $x = p"$

$$\Rightarrow \neg \varphi(x, p) \Leftrightarrow [\varphi(p, x) \vee p = x]$$

$$\text{Entonces } (\exists x \in F)(\neg \varphi(x, p) \wedge x \neq p) \Leftrightarrow (\exists x \in F)((\varphi(p, x) \vee p = x) \wedge x \neq p)$$

(distribuimos)

$$\Leftrightarrow (\exists x \in F)((\varphi(p, x) \wedge x \neq p) \vee \underbrace{(p = x \wedge x \neq p)}_{\text{Falso}})$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in F)(\varphi(p, x) \wedge x \neq p)$$

Pero $\varphi(p, x) \Rightarrow x \neq p$, lo que nos dice que

$$(\varphi(p, x) \wedge x \neq p) \Leftrightarrow \varphi(p, x)$$

$$\text{Luego } \neg [(\forall x \in F)(\varphi(x, p) \vee x = p)] \Leftrightarrow (\exists x \in F)(\varphi(p, x))$$

Que diría "Existe una persona x en la fila, tal que p está frente a ella", consistente con (*)

Ahora, la negación de (2) debería decir "p no es ni el 2^{do} ni el penúltimo".

Esta declaración no es evidente, pues hay varias formas o posiciones que P puede adoptar para NO ser ni 2^{do} ni penúltimo. Esto es común en la negación del cuantificador "∃!", donde la notación se vuelve pesada.

Primero recordamos la caracterización de existencia y unicidad (página 19 del apunte) y escribimos:

$$(2) := (\exists! x \in F) (\varphi(x, p) \vee \varphi(p, x))$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \left[(\exists x \in F) (\varphi(x, p) \vee \varphi(p, x)) \right] \wedge \left[(\forall x, x' \in F) ((\varphi(x, p) \vee \varphi(p, x)) \wedge (\varphi(x', p) \vee \varphi(p, x'))) \Rightarrow x = x' \right] \right\}$$

~~Entonces~~ Entonces $\neg [(\exists! x \in F) (\varphi(x, p) \vee \varphi(p, x))] \Leftrightarrow \neg ((\bullet) \wedge (\blacksquare))$

$$\Leftrightarrow (\overline{(\bullet)}) \vee (\overline{(\blacksquare)})$$

Pero $\overline{(\bullet)} : (\forall x \in F) (\overline{\varphi(x, p)} \wedge \overline{\varphi(p, x)})$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in F) ((\varphi(p, x) \vee p = x) \wedge (\varphi(x, p) \vee p = x))$$

y $\overline{(\blacksquare)} : (\exists x, x' \in F) [(\varphi(x, p) \vee \varphi(p, x)) \wedge (\varphi(x', p) \vee \varphi(p, x')) \wedge x \neq x']$

y así tenemos todo lo necesario para construir la negación. //