

P1

a) De la P1 sabemos como sacar raíces n -ésimas

$$\text{como } -1 = e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow W = e^{i \frac{(\pi + 2k\pi)}{n}} //$$

b) Si uno se fija el caso (b) es un caso particular de (a) si uno llama

$$W = \frac{1+z}{1+\bar{z}}$$

la ec queda $W^n = -1$
que es EXACTAMENTE LA DE (a)

AHORA BIEN EN GENERAL
 SI UNO TIENE INFO SOBRE $|z|$
 ^ HAY UN $\bar{z}$ SIEMPRE SE USA QUE

$$|z|^2 = z \bar{z} \Rightarrow \bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$$

EN ESTE CASO $|z| = 1$

$$\Rightarrow w = \frac{1+z}{1+\bar{z}} = \frac{1+z}{1+\frac{1}{z}} = z \left(\frac{1+z}{1+z} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{w = z}$$

OJO REVISAR QUE
 NO ESTOY DIV. POR CERO.

$\Rightarrow$ LA SOLUCIÓN TAMBIÉN ES

$$e^{\frac{i(\pi + 2k\pi)}{n}}$$

Prove que el producto de las n -raíces de la unidad es $(-1)^{n-1}$

Recordemos que una raíz es de la forma

$$e^{i \frac{2k\pi}{n}} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$\Rightarrow e^{i \frac{2 \cdot 0 \pi}{n}} \cdot e^{i \frac{2 \cdot 1 \pi}{n}} \cdot e^{i \frac{2 \cdot 2 \pi}{n}} \dots e^{i \frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

(esto se escribe $\prod_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{2k\pi}{n}}$)

Como multiplicamos con la misma base, sumamos los exponentes

$$= e^{i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k\pi}{n}} = e^{i \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k}$$

Recordando que $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$

¡OJO!

$$= e^{i \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{(n-1)(n-1)}{2}} = e^{i \frac{2\pi}{n} (n-1) \cdot \frac{n}{2}}$$

$$= \left(e^{i\pi} \right)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

2 formas de calcular $e^{i\pi}$

1) $\cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + 0 = -1$

2)



Sea $f: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$f(z_1, z_2) = |z_1 + z_2|$$

PDO: $f(z_1, z_2) \cdot f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) \cdot f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) &= |z_1 + z_2| \cdot |\bar{z}_1 + \bar{z}_2| \\ &= |(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)| = |z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2| \\ &= | |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + |z_2|^2 | \quad \left(\text{usando que } |a+b| \leq |a| + |b| \right) \\ &\leq | |z_1|^2 | + |z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1| + | |z_2|^2 | \quad \left(\text{EN } \mathbb{R} \text{ si } b > 0 \Rightarrow |b| = b \right) \\ &= |z_1|^2 + |z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1| + |z_2|^2 \end{aligned}$$

QUEREMOS $\leq (|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2$

faltaría ver que $|z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1| \leq 2|z_1 z_2|$

Sea $z_1 = (a+bi)$ y $z_2 = (c+di)$

$$\Rightarrow |(a+bi)(c-di) + (c+di)(a-bi)| \quad (i^2 = -1)$$

$$= |ac - adi + bci - bdi^2 + ac - bci + adi - dbi^2|$$

$$= |2ac + 2bd| = 2|ac + bd| \stackrel{?}{\leq} 2|z_1 z_2|$$

NOTAMOS QUE $z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac - bd + (bc + ad)i)$

si fuese (+) tendríamos
listos pues diríamos

$$|a| \leq |a+bi|$$

(EN TODO TRIANGULO RECTANGULO
MIDE MENOS QUE LA HIPOTENUSA)

PERO $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = |z_1| \cdot |\bar{z}_2| = |z_1 \bar{z}_2|$

$$= |(ac - bd) + (bc - ad)i| //$$

(Acabo de cachar que era más simple //

$$|z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2| \leq |z_1 \bar{z}_2| + |\bar{z}_1 z_2| = 2|z_1 z_2| //$$

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ t.q. $|z| = |w| = 1$

PDA: $|z+w| = |z|+|w| \Leftrightarrow z=w$

INDICACIÓN: Pruebe $[|z|=1 \wedge \operatorname{Re}(z)=1] \Leftrightarrow z=1$

Probamos primero la indicación

$$(\Leftarrow) z=1 \Rightarrow |z|=1 \wedge \operatorname{Re}(z)=1 //$$

$$(\Rightarrow) |z|=1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=1 \wedge \operatorname{Re}(z)=1 \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+b^2}=1 \Rightarrow 1+b^2=1 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

$$\Rightarrow z=1+0i=1 //$$

Demostremos ahora el problema

$$(\Leftarrow) \text{ si } z=w \Rightarrow |z+w| = |z+z| = 2|z| //$$

$$|z|+|w| = |z|+|z| = 2|z| //$$

$$\Rightarrow |z+w| = |z|+|w| = 2 \quad (\text{POR ENUNCIADO})$$

$$|(a+bi)+(c+di)| = |(a+c)^2 + (b+d)^2| = 4$$

$$|a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2| = 4$$

$$\text{Como } |z|=1 \Rightarrow a^2+b^2=1$$

$$|w|=1 \Rightarrow c^2+d^2=1$$

$$\Rightarrow |2+2(ac+bd)| = 4$$

$$\Rightarrow |1+(ac+bd)| = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{ac+bd=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Re}(z\bar{w})=1} \quad \text{además } |z\bar{w}| = |z| \cdot |\bar{w}| = 1$$

$$\text{EL HINT NOS DICE } z\bar{w}=1 \Rightarrow z = \frac{1}{\bar{w}} = \frac{w}{|w|^2} = \frac{w}{1} = w$$

$$\Rightarrow w=1$$

$$\Rightarrow \boxed{z=w} //$$

Considere $P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13$

se sabe que $x_1 = 2 + 3i$ es raíz de P
factorizarlo en $\mathbb{C}$ y en $\mathbb{R}$

Como x_1 es raíz $\Rightarrow \overline{x_1}$ también es.

Si bien podríamos dividir $P(x)$
en $(x - x_1)$ y luego en $(x - \overline{x_1})$ para
factorizarlo, es mejor dividirlo
en $(x - x_1)(x - \overline{x_1})$ pues P no tiene "i"

$$\Rightarrow (x - (2 + 3i))(x - (2 - 3i)) = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)$$

$$= (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)$$

$$= ((x - 2) - 3i)((x - 2) + 3i) \quad \left(\begin{array}{l} \text{suma por dif} \\ \text{que fácil } 0 \end{array} \right)$$

$$= (x - 2)^2 - (3i)^2 = x^2 - 4x + 4 - 9i^2 = x^2 - 4x + 4 + 9 = x^2 - 4x + 13$$

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 \div x^2 - 4x + 13 = x^2 + 2x + 1$$

$$- (x^4 - 4x^3 + 13x^2)$$

$$0 + 2x^3 - 7x^2 + 22x + 13$$

$$- (2x^3 - 8x^2 + 26x)$$

$$0 + x^2 - 4x + 13$$

$$- (x^2 - 4x + 13)$$

0 //

$$\Rightarrow P(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 4x + 13)$$

$$\text{factorizado en } \mathbb{R} = (x+1)^2 (x^2 - 4x + 13) //$$

$$\text{factorizado en } \mathbb{C} = (x+1)^2 (x-2-3i)(x-2+3i) //$$

ya que es un polinomio de grado 3, es de la forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ con } a \neq 0.$$

Como el polinomio es mónico, necesariamente $a = 1$.
Tenemos entonces: $x^3 + bx^2 + cx + d$.

Sabemos que $p(0) = 0$

$$\Leftrightarrow 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = 0$$

ya sabemos entonces que nuestro polinomio es de la forma:
 $x^3 + bx^2 + cx$.

Pero también sabemos que $p(2) = 0$

$$\Leftrightarrow 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 = 8 + 4b + 2c = 0$$

$$\Rightarrow c = -4 - 2b \quad (*)$$

pero aún nos falta una ecuación para encontrar b y c .

Nos dicen que el resto de dividir $p(x)$ en $(x-3)$ es igual al de dividirlo en $(x-1)$.

Recordemos que el teorema del resto nos dice que al dividir un polinomio $p(x)$ en algo de la forma $(x-c)$, el resto es $p(c)$.

Por lo tanto el resto de dividir $p(x)$ en $(x-3)$ es $p(3)$ y el de dividir $p(x)$ en $(x-1)$ es $p(1)$

$$\Rightarrow p(3) = p(1)$$

$$\Leftrightarrow 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 = 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow 27 + 9b + 3c = 1 + b + c$$

$$\Leftrightarrow 8b + 2c = -26$$

reemplazando c de $(*)$ queda

$$8b + 2(-4 - 2b) = -26$$

$$\Leftrightarrow 8b - 8 - 4b = -26$$

$$\Leftrightarrow 4b = -18$$

$$\Rightarrow b = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow c = -4 - 2 \cdot -\frac{9}{2} = 5$$

$$\Rightarrow p(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5$$

$$p(x) = 6x^5 - 25x^4 + 16x^3 + 21x^2 - 18x$$

$$\Rightarrow p(x) = x(6x^4 - 25x^3 + 16x^2 + 21x - 18)$$

Sabemos que si $\frac{r}{s}$ es raíz

$$\Rightarrow r/a_0 \text{ y } s/a_n$$

$\Rightarrow$ como tenemos 3 raíces enteras

$$r_1 | 18, r_2 | 18, r_3 | 18$$

OJO que puede ser que alguna de esas r se la raíz 0 que ya está contabilizada.

como son no negativas

$$\Rightarrow r_i \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

claramente $6 \cdot 18^5$ es muy grande
jamás $p(18) = 0$

$\Rightarrow$ vamos a partir con las menores.

$$r=1 \Rightarrow 6 - 25 + 16 + 21 - 18 = 0 \quad // \quad \checkmark$$

$$r = 6x^4 - 25x^3 + 16x^2 + 21x - 18 \div (x-1) = 6x^3 - 19x^2 - 3x + 18$$

$$r = (6x^4 - 6x^3)$$

$$-19x^3 + 16x^2$$

$$-(-19x^3 + 19x^2)$$

$$-3x^2 + 21x$$

$$-(-3x^2 + 3x)$$

$$18x - 18$$

$$18x - 18$$

$$0 \quad //$$

Veamos si $r=2$

$$6 \cdot 8 - 19 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 18 \neq 0$$

$$r=3$$

$$6 \cdot 3^3 - 19 \cdot 9 - 3 \cdot 3 + 18 = 0 \quad \checkmark$$

$$6x^3 - 19x^2 - 3x + 18 \div (x-3) = 6x^2 - x - 6$$
$$\begin{array}{r} 6x^3 - 19x^2 \\ -(6x^3 - 18x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 - 3x \\ -(-x^2 + 3x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6x + 18 \\ -(-6x + 18) \end{array}$$
$$\underline{\hspace{1.5cm}} \quad 0 \quad //$$

$$6x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6 \cdot 6}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{145}}{12} \quad //$$

$$\Rightarrow p(x) = x(x-1)(x-3)\left(x - \frac{1 - \sqrt{145}}{12}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{145}}{12}\right)$$
$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad //$$

P7

$$p(x) = \sum_{j=1}^6 \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \sum_{k=1}^j (4k^3 x^{j-1})$$

$$= \sum_{j=1}^6 \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \cdot 4x^{j-1} \sum_{k=1}^j k^3$$

$$\underbrace{\left(\frac{j(j+1)}{2} \right)^2}_{\leftarrow \text{suma conocida}}$$

$$= \sum_{j=1}^6 \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \cdot 4x^{j-1} \cdot \frac{j^2(j+1)^2}{4}$$

$$= \sum_{j=1}^6 (-1)^j \cdot j^2 x^{j-1} = 36x^5 - 25x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1$$

Nuevamente, tenemos que si una raíz es de la forma $\frac{r}{s}$

$$r \mid a_0 \quad \wedge \quad s \mid a_n$$

Como estamos buscando raíces enteras, son de la forma

$$r = \frac{r}{1} \Rightarrow r \mid a_0$$

Entonces tenemos que buscar entre los números que dividen a -1 , es decir 1 y -1 .
Probemos:

$$p(1) = 36 - 25 + 16 - 9 + 4 - 1 \neq 0$$

$$p(-1) = -36 - 25 - 16 - 9 - 4 - 1 \neq 0$$

∴ $p(x)$ No tiene raíces enteras.