MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto San Martín.
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: Jueves 9 de agosto del 2018

Auxiliar 13: Grupos y Subgrupos

Resumen:
Sea $(A, *)$ una estructura algebraica.

- $(A, *)$ es un **grupo** si $*$ es asociativa, tiene neutro $e \in A$ y todo elemento $x \in A$ tiene inverso $x^{-1} \in A$.
- Si $(A, *)$ es grupo, y $\phi \neq H \subseteq A$. Diremos que $(H, *)$ es **subgrupo**, si $(H, *)$ es un grupo, o equivalentemente $(\forall x, y \in H)\ x * y^{-1} \in H$.
- **Teorema de Lagrange**. Sea $(G, *)$ un grupo finito y $(H, *)$ un subgrupo cualquiera de él. Entonces $|H|$ divide a $|G|$.
- Sean $(A, *)$ y (B, Δ) estructuras algebraicas, diremos que **f es morfismo** si es una función que cumple:

$$\begin{array}{ll} f : A & \longrightarrow B \\ x * y & \longmapsto f(x * y) = f(x) \Delta f(y) \end{array} \quad (\forall x, y \in A)$$

Si además f es biyectivo se denomina **isomorfismo** y se habla de que $(A, *)$ es **isomorfo** (B, Δ)
Notación: $(A, *) \cong (B, \Delta)$.

P1. Sea $(G, \cdot)$ grupo y H, K subgrupos de G, demuestre que

a) $H \cap K$ es subgrupo de G.
b) Sean H y G tales que $|H| = 38$ y $|K| = 55$. Demostrar que $H \cap K = \{e\}$. Con e el neutro.
c) $H \cup K$ es subgrupo de $G \Leftrightarrow H \subseteq K \vee K \subseteq H$.

P2. Considere $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$.

a) Construya la tabla para la operación $\cdot_5$ en $\mathbb{Z}_5$.
b) Explique por qué $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ no es un grupo.
c) Muestre que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano.
d) Encuentre los subgrupos de $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$. Explique.
Indicación: considere el teorema de Lagrange.

P3. Sea $(G, *)$ un grupo no necesariamente abeliano, con neutro e.
Para $a \in G$ se defina la función $f_a : G \to G, f_a(x) = a * x * a^{-1}$.

a) Pruebe que $f_e = id_G$ y que para todo $a, b \in G, f_{a*b} = f_a \circ f_b$. Donde $\circ$ es la composición de funciones.
b) Pruebe que $\forall a \in G, f_a$ es un isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.
Concluya que f_a es invertible con $f_a^{-1} = f_{a^{-1}}$ y que la estructura $(\{f_a | a \in G\}, \circ)$ es un grupo.
c) Pruebe que si $H(G) = \{a \in G | f_a = id_G\}$, entonces $(H(G), *) \leq (G, *)$, es decir $(H(G), *)$ es subgrupo de $(G, *)$. Y que $a \in H(G) \Leftrightarrow \forall x \in G, a * x = x * a$.

P4. *a*) $(G, \cdot)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G. Probar que el conjunto

$$H \cdot K = \{h \cdot k \mid h \in H, k \in K\}$$

es subgrupo de $(G, \cdot)$.
b) Sea $(G, \cdot)$ un grupo finito de orden 4, es decir $|G| = 4$, con neutro $e \in G$. Pruebe que $\forall a \in G \setminus \{e\}$ se tiene que $a^3 \neq e$ $(a^3 = a \cdot a \cdot a)$.
Indicación: Use el teorema de Lagrange.

P5. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y $f : G \to G$ la función definida por $f(g) = g^{-1}$, probar que si G es grupo abeliano, entonces es f isomorfismo.