MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto San Martín.
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: Miércoles 15 de agosto del 2018

Auxiliar 14: Anillos y Complejos

Resumen:
Sea $(A, +, \cdot)$ un conjunto con dos estructuras:

- Se dice **anillo** si $(A, +)$ es grupo abeliano, y adem·s $\cdot$ es asosciativa y distribuye con respecto a $+$.
- Se dice **anillo conmutativo con unidad** si es un anillo, y $\cdot$ es conmutativo y posee neutro.
- Si es un anillo con unidad con $|A| > 1 \Rightarrow 0 \neq 1$.
- Sean x, y ambos no nulos. Si $x \cdot y = 0$ se dice que x e y son **divisors del cero.** Notar que en este caso $x \cdot a = x \cdot b \not\Rightarrow a = b$.
- Se dice **cuerpo** si es un anillo conmutativo con unidad y $\forall x \in A \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$. Notar que todo cuerpo no tiene divisores del cero (ojo es solo una implicancia).
- Si es un anillo conmutativo con unidad y $|A|$ finito lo anterior es una equivalencia.
- Si $z = a + ib$, entonces $z = \rho e^{i\phi}$, con $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\phi = arg(z) = \{$Ángulo de rotación$\}$
- Si $z = \rho e^{i\phi}$, entonces $z = \rho[\cos(\phi) + sen(\phi)i]$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ también $Im(Z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow Re(z) = z \Leftrightarrow Im(z) = 0$
- Las raíces n-ésimas de la unidad son: $w_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$, con $k = 0, ..., n-1$.
- Dado $w \in \mathbb{C}$ fijo, las soluciones de la ecuación $z^n = w$ son $\sqrt[n]{|w|} w_k e^{\frac{i \cdot arg(w)}{n}}$, con $k = 0, ..., n-1$, donde los w_k son las raíces n-ésimas de la unidad.
- La suma de las raíces n-ésimas de la unidad es cero.

P1. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un subconjunto $I \subseteq A$ se dirá ideal de A si y solo si:

- $(I, +)$ es grupo.
- $\forall a \in A, b \in I \quad a \cdot b \in I \land b \cdot a \in I$

(a) Sea $F : (A, +, \cdot) \to (B, \oplus, \odot)$ un morfismo sobreyectivo de anillos. Demuestre que $F^{-1}(\{0_B\})$ es un ideal de A donde 0_B es el neutro para $\oplus$ en B

(b) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad $1 \in A$, e I ideal en A.

i. Demuestre que si $1 \in I$, entonces $I = A$.

ii. Demuestre que si $\exists x \in I$ invertible para $\cdot$, entonces $I = A$.

P2. Demuestre que $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ es isomorfo a $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$.

P3. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

(a) Si $a \in A$ es un divisor del 0 y $b \in A$, tal que $a \cdot b \neq 0$,entonces $a \cdot b$ es divisor del 0.

(b) Demuestre que si el producto de dos elementos es divisor del 0, entonces al menos uno de ellos es divisor del 0.

(c) Sea $a \in A$ define el conjunto aniquilador de a , como $Ann(a) = \{b \in A \mid \text{ tal que } b \cdot a = 0\}$. Pruebe que $Ann(a)$ es un ideal, definido como en el problema anterior.

P4. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad, con $w \neq 1$. Pruebe que

$$(1 + w)^3 + (1 + w^2)^9 + (1 + w^3)^6 = 62$$

P5. Sean $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un complejo dado, $n \geq 2$ $\{z_0, ..., z_{n-1}\}$ las raíces n-ésimas de z. Calcule:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}$$