P1

a) PDQ: $F^{-1}(\{0_B\})$ es un ideal

$\rightarrow f^{-1}(\{0_B\})$ grupo.

NOTEMOS QUE $f^{-1}(\{0_B\}) \subseteq A$

como $(A,+,\cdot)$ anillo $\Rightarrow (A,+)$ grupo

Luego basta ver que

$f^{-1}(\{0_B\})$ es subgrupo de A

PDQ: $f^{-1}(\{0_B\}) \neq \phi$

$f^{-1}(0_A) = 0_B \Rightarrow 0_A \in f^{-1}(\{0_B\})$

$\Rightarrow f^{-1}(\{0_B\}) \neq \phi$

TODO MORFISMO LLEVA EL CERO AL CERO.

PDQ: $\forall x,y \in f^{-1}(\{0_B\}) \Rightarrow x+(-y) \in f^{-1}(\{0_B\})$

como f es morfismo

$f(x+(-y)) = f(x) \oplus f(-y)$

$= 0_B \oplus f(-y) = f(-y)$

pues $x \in f^{-1}(\{0_B\})$

BASTARÍA VER QUE $f(-y) = 0_B$

NOTEMOS, QUE NO HEMOS USADO QUE $y \in f^{-1}(\{0_B\})$

$\Rightarrow f(y) = 0_B$

CASI, AH PERO ... $y + (-y) = 0_A$

$$f(0_A) = f(y + (-y)) = f(y) \oplus f(-y)$$

$$\Rightarrow 0_B = 0_B \oplus f(-y)$$

$$\Rightarrow 0_B = f(-y)$$

$\therefore f^{-1}(\{0_B\})$ (sub) grupo

Veamos ahora que

$\forall a \in A,\ b \in f^{-1}(\{0_B\})$ $\quad ab \in f^{-1}(\{0_B\})$

$ba \in f^{-1}(\{0_B\})$

QUEREMOS QUE $ab \in f^{-1}(\{0_B\})$ o sea

$f(ab) = 0_B$ pero f morfismo)

$$\Rightarrow f(ab) = f(a) \odot f(B) = f(a) \cdot (0_B) = 0_B$$

EN TODO ANILLO
EL NEUTRO DE LA PRIMERA
OPERACIÓN ES ABSORVENTE CON LA 2ª.

ANÁLOGO EL OTRO CASO

b) I) Sea $a \in A$, es claro que $I \subseteq A$, veamos $A \subseteq I$

NO TENEMOS MÁS INFORMACIÓN QUE I ES IDEAL Y QUE $1 \in I$

OH! pero justo los ideales cumplen que

$$a \cdot 1 \wedge 1 \cdot a \in I$$

$$= a \in I$$

$$\Rightarrow A \subseteq I \Rightarrow A = I$$

II) OJO! DICE QUE $\exists x \in I$ invertible para $\cdot$, $(I, +)$ es grupo NI IDEA SOBRE $(I, \cdot)$ ASÍ QUE EL INVERSO NO TIENE PORQUÉ ESTAR EN I. PERO SÍ EN A.

$$\Rightarrow x^{-1} \in A \wedge x \in I$$

$$\Rightarrow x^{-1} \cdot x \in I$$

$$\Rightarrow 1 \in I$$

Y POR LO ANTERIOR $I = A$

P2

Basta tomar la función

$$f: \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \{1, -1, i, -i\}$$

$f([1]) = i$
$f([2]) = -1$
$f([3]) = -i$
$f([4]) = 1$ (o cualquier otra)

Esta función es claramente biyectiva, ya que para cada elemento del conjunto de llegada ($\forall y$) existe alguien en $\mathbb{Z}_4$ ($\exists x$) tal que $f(x) = y$ (sobreyectividad) y cada elemento de $\mathbb{Z}_4$ llega a alguien distinto (inyectividad)

Veamos ahora que es un morfismo

P.D.Q. $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ $\forall a, b \in \mathbb{Z}_4$

Veamoslo a través de tablas

$+_4$	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

$\cdot$	i	-1	$-i$	1
i	-1	$-i$	1	i
-1	$-i$	1	i	-1
$-i$	1	i	-1	$-i$
1	i	-1	$-i$	1

Si se toman dos elementos $a, b \in \mathbb{Z}_4$ se puede notar que $f(a +_4 b) = k = f(a) \cdot f(b)$ para todos los elementos de la tabla

Por ejemplo $f(1 +_4 3) = f(4) = 1 = i \cdot -i = f(1) \cdot f(3)$
y así para cualquier elemento

P3

a) Recordemos que:

$(A,+,\circ)$ tiene divisores del 0 (neutro para $+$)

si $\exists\ a,b \neq 0$ tq $ab = 0$

como por enunciado a es divisor
$\exists\ c$ (que no es b) con $c \neq 0$
tq $ac = 0 = c \circ a$

como queremos que
ab sea divisor del cero
necesitamos que $\exists\ d \neq 0$ tq

$$d \circ (ab) = (ab)d = 0$$

tomando $d = c$

$$c \circ (a \circ b) = (c \circ a) \circ b = 0 \cdot b = 0$$

$$(a \circ b) \circ c \underset{\uparrow}{=} (b \circ a) \circ c = b(a \circ c) = b \circ 0 = 0$$

pues es un anillo conmutativo

$\therefore$ ab es divisor del cero

b) Si ac es divisor del 0
$\Rightarrow ac \neq 0 \Rightarrow a \wedge c \neq 0$

Además $\exists$ $b \neq 0$ ts

$$b \circ (ac) = 0$$

SI a NO ES DIVISOR DE 0

$\forall d \neq 0 \quad ad = da \neq 0$

en particular para $d = b$

$$\Rightarrow \underbrace{(b \circ a)}_{\neq 0} \circ \underbrace{c}_{\neq 0} = 0$$

$\Rightarrow (b \cdot a) \wedge c$ son divisores del 0

en particular c que era lo que me interesaba //

(Análogo el otro caso, NOTANDO QUE EL ANILLO ES CONMUTATIVO $\Rightarrow b \circ a \circ c = b \circ c \circ a$)

c) Veamos que $Ann(a)$ es (sub) grupo

1) $Ann(a) \subseteq A$ //

2) $Ann(a) \neq \phi$ si pues $0 \in Ann(a)$ ya que $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

3) PDQ: $\forall x, y \in Ann(a) \Rightarrow (x + (-y)) \in Ann(a)$

$x \in Ann(a) \Rightarrow xa = 0$

$y \in Ann(a) \Rightarrow \cancel{ya} = 0 = 0a = (y + (-y))a$

$= \cancel{ya} + (-y)a$

$\Rightarrow \quad 0 = (-y)a \Rightarrow (-y) \in Ann(a)$ //

$\Rightarrow (x+(-y))a$

$= xa + (-y)a$

$= 0 + 0 = 0$

pues x e $-y \in Ann(a)$ //

$\Rightarrow (Ann(a), +)$ es grupo.

PDQ: $\forall b \in A, \forall c \in Ann(a)$

$b \circ c \wedge c \circ b \in Ann(a)$

como $c \in Ann(a)$

$\Rightarrow c \circ a = 0$

$\Rightarrow b \circ c \circ a = 0$

$\Rightarrow (b \circ c) \in Ann(a)$ //

además como $Ann(a) \subseteq A \wedge$ conmutativo para $\circ$

$\Rightarrow b \circ c = c \circ b$

(la conmutatividad es "hederitaria"

$A \subseteq B \leftarrow$ conmutativo

$\Rightarrow A$ conmutativo) //

P4

Si $w^3 = 1$ con $w \neq 1$

$\Rightarrow (1+w)^3 + (1+w^2)^9 + (1+w^3)^6 = 62$

$$w^3 = 1 \Rightarrow w = e^{i\frac{2\pi}{3}} \; (w_1) \;\vee\; w = e^{i\frac{4\pi}{3}} \; (w_2)$$

$$\Rightarrow w^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \;\vee\; w^2 = e^{i\frac{8\pi}{3}}$$

¡ES LA SEGUNDA OPCIÓN!

¿ES LA PRIMERA OPCIÓN?

SI PUES

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)}$$

$\Rightarrow$ Da lo mismo QUE RAIZ SEA
AL ELEVARLA AL CUADRADO
DA LA OTRA!

ADEMÁS LA SUMA DE LAS RAICES SIEMPRE DA CERO!

$$\Rightarrow \quad 1 + w_1 + w_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 + w_2 = -w_1 \quad \wedge \quad 1 + w_1 = -w_2$$

SI $w = w_1$

$$\Rightarrow (1+w)^3 + (1+w^2)^9 + (1+w^3)^6$$

$$= (-w_2)^3 + (1+w_2)^9 + (1+1)^6$$

$$= -1 + ((-w_1)^3)^3 + 64$$

$$= -1 + (-1)^3 + 64$$

$$= -2 + 64$$

$$= 62$$

SI $w = w_2$ ES LO MISMO, CAMBIANDO w_1 POR w_2 $\wedge$ VICEVERSA.

P5

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k} \cdot \frac{\overline{z_k}}{\overline{z}_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|^2}$$

NOTAR QUE TODAS LAS RAICES
SIEMPRE TIENEN EL MISMO MÓDULO
$\Rightarrow$ ES CTE Y SALE DE LA SUMATORIA

$$= \frac{1}{|z_1|} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_k} = \frac{1}{|z_1|} \overline{\sum_{k=0}^{n-1} z_k} = \frac{1}{|z_1|} \overline{0} = 0$$

PODRÍA SER CUALQUIERA
$z_1 \vee z_2 \vee z_3 \vee \cdots z_{n-1}$