PAUTA AUX 10

P1 a) Claramente si H y K son subconjuntos de G, $H \cap K$ también lo es, además $e \in H \wedge e \in K$ (son grupos) $\Rightarrow e \in H \cap K \Rightarrow H \cap K \neq \phi$

Veamos ahora que $\forall x, y \in (H \cap K)$, $x * y^{-1} \in (H \cap K)$

En efecto:

Pq' H y K son subgrupos.

$$x, y \in H \cap K \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in H & \Rightarrow x * y^{-1} \in H \\ \wedge & \\ x, y \in K & \Rightarrow x * y^{-1} \in K \end{cases} \Bigg\} \; x * y^{-1} \in (H \cap K)$$

$\therefore H \cap K$ es subgrupo de G

b) Como $H \cap K$ subgrupo $\Rightarrow |H \cap K| \,\Big|\, |H| \wedge |H \cap K| \,\Big|\, |K|$

$|H| = 55 = 5 \cdot 11 \cdot 1$, $|K| = 38 = 19 \cdot 2 \cdot 1$

Y el único divisor común es el $1 \Rightarrow |H| = 1$

Y el neutro siempre está $\Rightarrow H = \{e\}$ //

c) $\boxed{\Leftarrow}$ caso 1: $H \subseteq K \Rightarrow H \cup K = K$ y como K es subgrupo de G, $H \cup K$ también lo es.

caso 2: $K \subseteq H \Rightarrow H \cup K = H$ y como H es subgrupo de G, $H \cup K$ también lo es

$\therefore H \subseteq K \vee K \subseteq H \Rightarrow H \cup K$ subgrupo de G

~~$\Rightarrow$~~ $H \cup K$ subgrupo de G

$\Rightarrow$] P.D.Q: $H \subseteq K \vee K \subseteq H \iff$ $H \nsubseteq K \Rightarrow K \subseteq H$ ← caracterización del implica

En efecto: $H \nsubseteq K \iff \exists h \in H$ tq' $h \notin K$

P.D.Q: $K \subseteq H$

ya que tenemos como hipótesis que $H \cup K$ es subgrupo de G,

$\forall k \in K$, $k \cdot h \in H \cup K$

$\iff k \cdot h \in H \vee k \cdot h \in K$

↑ esto es Falso

ya que si $k \cdot h \in K$

$\Rightarrow k^{-1} \cdot k \cdot h \in K \Rightarrow h \in K \rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow k \cdot h \in H \Rightarrow k \cdot h \cdot h^{-1} \in H \Rightarrow k \in H$

$\therefore k \in K \Rightarrow k \in H$

$\iff K \subseteq H$

$\therefore H \nsubseteq K \Rightarrow K \subseteq H$

$\iff H \subseteq K \vee K \subseteq H$

$\therefore H \cup K$ subgrupo de $G \Rightarrow H \subseteq K \vee K \subseteq H$ //

P2) a)

$\cdot_5$	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[2]	[2]	[4]	[1]	[3]	[5]
[3]	[3]	[1]	[4]	[2]	[5]
[4]	[4]	[3]	[2]	[1]	[5]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]

b) $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ no es un grupo ya que [5] no tiene inverso

(no existe nadie tal que $[\text{alguien}] \cdot_5 [5] = [1]$ //

c) Notemos que $[0] = [5]$

veamos entonces que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es grupo abeliano

- conmutatividad: ya que la diagonal de la tabla es como un "espejo", $\cdot_5$ conmuta.
- neutro: de la tabla es claro que [1] es neutro.
- inverso: de la tabla podemos observar que:

$[1] \cdot_5 [1] = [1]$

$[2] \cdot_5 [3] = [1]$ $\therefore$ Todos los elementos tienen inverso

$[4] \cdot_5 [4] = [1]$

- asociatividad:

$([a] \cdot_5 [b]) \cdot_5 [c] = [a \cdot b] \cdot_5 [c] = [a \cdot b \cdot c]$

$= [a] \cdot_5 [b \cdot c] = [a] \cdot_5 ([b] \cdot_5 [c]) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}$

$\therefore (\mathbb{Z}_5^{\setminus\{[0]\}}, \cdot_5)$ asocia

$\therefore (\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano

d) ya que $|\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}| = 4$, podemos tener subgrupos de cardinal 1, 2 y 4

el de 1 es $(\{[1]\}, \cdot_5)$ (el neutro siempre es subgrupo)

el de 4 es $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ (el mismo grupo)

ahora veamos quienes pueden ser los de cardinal = 2.

Recordemos que el neutro siempre tiene que estar, entonces quién más?

una propiedad importante de los subgrupos es la cerradura $(x, y \in S \Rightarrow x \cdot_5 y \in S)$. nuestro subgrupo es $(\{[1], [\text{alguien}]\}, \cdot_5)$

claramente $[1] \cdot_5 [1]$, $[1] \cdot_5 [\text{alguien}]$ estarán en el conjunto, pero necesitamos que $[\text{alguien}] \cdot_5 [\text{alguien}]$ también lo esté, es decir $[\text{alguien}] \cdot_5 [\text{alguien}]$ sea $[1]$ o $[\text{alguien}]$. volvamos a la tabla:

el $[4]$ es el único que lo cumple !!

∴ los subgrupos son:

$$(\{[1]\}, \cdot_5), \quad (\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5) \quad y \quad (\{[0], [4]\}, \cdot_5)$$ //

OTRA FORMA DE VERLO ES QUE EN LOS GRUPOS TODOS DEBEN TENER INVERSO

SI CONSIDERÁRAMOS

$(\{[1], [2]\})$ ó $(\{[1], [3]\})$ NO SE CUMPLE.

su inverso es el $[3]$

su inverso es el $[2]$

P3) a) $f_e(x) = e * x * e^{-1} = e * x * e = x$

$\therefore \ f_e = Id_G$

$f_{a*b}(x) = (a*b) * x * (a*b)^{-1} = a * b * x * b^{-1} * a^{-1}$

$= f_a(b * x * b^{-1}) = f_a(f_b(x)) = f_a \circ f_b$ //

b) morfismo: $f_a(x*y) = a * x * y * a^{-1} = a * x * e * y * a^{-1}$

$= a * x * \underbrace{a^{-1} * a}_{e} * y * a^{-1} = f_a(x) * f_a(y)$

Biyección: veamos que f_a es invertible

Buscamos a g tal que $f_a \circ g = Id$

En efecto: $Id_G = f_e$ (por (a)) $= f_{a*a^{-1}} = f_a \circ f_{a^{-1}}$

$\therefore \ \forall a \ f_a^{-1}$ es invertible

$\Leftrightarrow f_a$ es Biyectiva

$\therefore \ f_a$ es isomorfismo de $(G,*)$ en $(G,*)$.

$(\{f_a | a \in G\}, \circ)$ es grupo ya que todos los elementos tienen inverso, existe el neutro ($f_e = Id_G$) y la composición es asociativa

c) • P.D.Q: $(H(G), *)$ es subgrupo de $(G, *)$

claramente $H(G) \leq G$ $\wedge$ $Id_G = f_e \Rightarrow e \in H(G)$
$\Rightarrow H \neq \phi$

veamos que $\forall x, y \in H(G)$ $x * y^{-1} \in H(G)$

En efecto $x, y \in H(G) \Leftrightarrow f_x = f_y = Id_G$

Pero $f_{x*y^{-1}} = f_x \circ f_{y^{-1}} = f_x \circ f_y^{-1} = Id_G \circ Id_G^{-1} = Id_G$

$\Rightarrow f_{x*y^{-1}} = Id_G \Rightarrow x * y^{-1} \in H(G)$ //.

• P.D.Q. $\forall x \in G$ $a * x = x * a \Leftrightarrow a \in H(G)$

$a \in H(G) \Leftrightarrow f_a = Id \Leftrightarrow a * x * a^{-1} = x \underset{/*a}{\Leftrightarrow} a * x = x * a$ //

P4) a) Como G grupo $\Rightarrow$ es cerrado $\Rightarrow HK \subseteq G$, además $e = \underset{\in H}{e} \circ \underset{\in K}{e} \Rightarrow HK \neq \phi$

veamos que $\forall x, y \in H \cdot K \quad x \cdot y^{-1} \in H \cdot K$

En efecto: $x \in H \cdot K \iff x = \tilde{h} \cdot \tilde{k}, \quad \tilde{h} \in H \wedge \tilde{k} \in K$

$y \in H \cdot K \iff y = \hat{h} \cdot \hat{k}, \quad \hat{h} \in H \wedge \hat{k} \in K$.

$\Rightarrow x \cdot y^{-1} = \tilde{h} \cdot \tilde{k} \cdot (\hat{h} \cdot \hat{k})^{-1} =$

$= \tilde{h} \cdot \tilde{k} \cdot \hat{k}^{-1} \cdot \hat{h}^{-1} = \underbrace{\tilde{h} \cdot \hat{h}^{-1}}_{\bar{h} \in H} \cdot \underbrace{\tilde{k} \cdot \hat{k}^{-1}}_{\bar{k} \in K} = \bar{h} \cdot \bar{k} \in H \cdot K$ //

conmuta pq' es grupo abeliano.

b) Supongamos que $a^3 = e$

$\Rightarrow a^2 \circ a = a \circ a^2 = e$

$\Rightarrow$ el inverso de a es a^2

$\Rightarrow$ podemos considerar el subgrupo

$A = \{e, a, a^2\}$, NOTEMOS que $|A| = 3$

pero 3 NO DIVE A 4 POR LAGRANGE ESTO ES UNA CONTRADICCIÓN //

OJO! HAY QUE REVISAR que es grupo claramente es subconjunto y no vacío

PDQ: $\forall x, y \in A \Rightarrow xy^{-1} \in A$

x	y	xy^{-1}
e	a	a
e	a^2	a^2
e	e	e

x	y	xy^{-1}
a	e	a
a	a	a^2
a	a^2	$a^3 = e$

x	y	xy^{-1}
a^2	e	a^2
a^2	a	a^2
a^2	a^2	$a^4 = aa^3 = ae = a$ //

$\therefore A$ subgrupo //

Pauta P5

Sea $(G, \cdot)$ un grupo abeliano. Veamos que f es isomorfismo.

- Morfismo:
  Sea $g, h \in G$. Luego $f(g \cdot h) = (g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1}$ (pues $g, h \in G$ que es grupo, por lo que tienen inverso)
  $= g^{-1} \cdot h^{-1}$ (porque es grupo abeliano)
  $= f(g) \cdot f(h)$

- Biyectividad:
  Notemos que f es inversa a f pues $f \circ f : G \to G$ y $f \circ f(g) = f(f(g)) = f(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g$
  Como f tiene inversa, es biyectiva.

Se concluye entonces que f es isomorfismo de $(G, \cdot)$ en $(G, \cdot)$.