

MA1101-7 Introducción al Álgebra

Profesor: José Soto San Martín.

Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.

Fecha: Jueves 2 de Agosto de 2018



Auxiliar 12: Cardinalidad y Estructuras Algebraicas

P1. Sea \mathcal{C} el conjunto de todas las circunferencias en el plano cartesiano cuyos centros tienen coordenadas racionales y su radio es racional. Es decir, $C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow C$ es una circunferencia de centro (a, b) y radio r con $a, b, r \in \mathbb{Q}$. Pruebe que el conjunto de todos los pares de puntos (P, Q) , donde P y Q son los extremos de los diámetros horizontales de las circunferencias de \mathcal{C} , es infinito numerable.

P2. Se define en \mathbb{R}^2 la ley de composición interna $*$ por

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d).$$

- Estudiar la conmutatividad y asociatividad de $*$.
- Determine el neutro en $(\mathbb{R}^2, *)$.
- Determine qué elementos son invertibles para $*$ y calcule sus inversos.
- Determine los elementos idempotentes en $(\mathbb{R}^2, *)$.

P3. Sea A un conjunto y $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ una función. Demuestre que si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}(\{n\})$ es numerable, entonces A es numerable.

P4. Consideremos $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa en A . Sea $a \in A$ fijo, se define:

$$B = \{x \in A \mid a * x = x * a\}$$

Demuestre que:

- $(\forall x, y \in B) x * y \in B$.
- Si $e \in A$ es neutro, entonces $e \in B$.
- Si $x \in B$ tiene inverso x^{-1} , entonces $x^{-1} \in B$.

P5. Demuestre (sin usar inducción) que dados $j, n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2j$ se cumple que $n^j \leq 2^{jn}$.

P6. Demuestre que la cantidad de libros que pueden y podrían existir es a lo más numerable.

P7. [Propuesto] Demuestre que el conjunto de todos los triángulos cuyos vértices son elementos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable.