P1 sabemos que $\mathcal{C} = \{C : C$ es una circunferencia de centro $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ y radio $r \in \mathbb{Q}^+\}$

Para cualquier radio $r_0 \in \mathbb{Q}^+$, existen infinitas circunferencias de centro $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, ya que los racionales son infinitos.

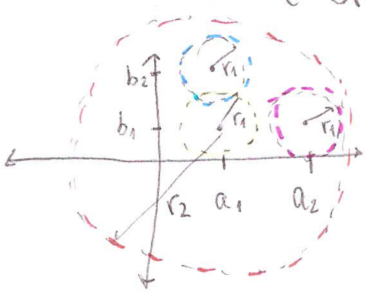
Veamos primero que C es numerable:

Podemos definir $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \to \mathcal{C}$

$$(a,b,r) \mapsto f(a,b,r) = C$$

donde las primeras dos coordenadas definen el centro de la circunferencia y r el radio.

f es claramente biyectiva ya que si dos circunferencias son iguales, entonces tienen el mismo centro y el mismo radio (inyectividad) ★ y a la vez, cualquier circunferencia $C \in \mathcal{C}$ se puede definir con esos 3 parámetros (sobreyectividad).



★ si tenemos una circunferencia C_1 de centro (a_1, b_1) y radio r_1:

→ si cambiamos el radio a r_2, nos queda $C_2 \neq C_1$

→ si cambiamos a_1 a a_2, nos queda $C_3 \neq C_1 \neq C_2$

→ si cambiamos b_1 a b_2, nos queda $C_4 \neq C_1 \neq C_2 \neq C_3$

inyectividad: Si tenemos dos circunferencias diferentes, entonces los puntos extremos de sus diámetros horizontales también serán distintos.

Sobreyectividad: Para cualquier par de puntos (p_1, p_2), (q_1, q_2) en D (dos puntos con coordenadas racionales y $p_2 = q_2$), existe una única circunferencia determinada por esos puntos (de centro $\left(\frac{p_1+q_1}{2}, p_2\right)$ y radio $\frac{|p_1-q_1|}{2}$)

$$\therefore \quad |\mathcal{C}| = |D|$$

$\Rightarrow$ D numerable //.

ya que $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \to \mathcal{C}$ es biyectiva

$$|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+| = |\mathcal{C}|$$

pero $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+| = |\mathbb{N}|$

$\Rightarrow |\mathcal{C}| = |\mathbb{N}|$ es decir, C es numerable.

pero nosotros queremos demostrar que si

$$D = \{(P, Q) : P \text{ y } Q \text{ extremos de diámetros horizontales de circunferencias en } \mathcal{C}\}$$

entonces: $|D| = |\mathbb{N}|$

pero como ya sabemos que $\mathcal{C}$ es numerable, sólo tenemos que demostrar que $|D| = |\mathcal{C}|$

Sea $g: \mathcal{C} \to D$ que toma una circunferencia en $\mathcal{C}$ y entrega los puntos extremos de su diámetro horizontal.
Esta función también es biyectiva!

P2 a) • CONMUTATIVIDAD $\Leftrightarrow$ $(a,b)*(c,d) = (c,d)*(a,b)$

veamos si $*$ es conmutativo:

$\rightarrow (a,b)*(c,d) = (ac, bc+d)$
$\rightarrow (c,d)*(a,b) = (ca, da+b)$

son diferentes!!

$\therefore$ $*$ <u>NO</u> es conmutativo

• asociatividad $\Leftrightarrow$ $[(a,b)*(c,d)]*(e,f) = (a*b)*[(c,d)*(e,f)]$

veamos si $*$ es asociativo:

$\rightarrow [(a,b)*(c,d)]*(e,f) = (ac, bc+d)*(e,f)$

$= (ace, (bc+d)e+f) = (ace, bce+de+f)$

usando sólo la definición del enunciado

$\rightarrow (a,b)*[(c,d)*(e,f)] = (a,b)*(ce, de+f)$

$= (ace, bce+de+f)$

¡SON IGUALES!

$\therefore [(a,b)*(c,d)]*(e,f) = (a,b)*[(c,d)*(e,f)]$

$\therefore$ $*$ es asociativo //.

b) El neutro es alguien (llamémoslo "(e_1, e_2)")

que cumple que

$$(a,b) * (e_1, e_2) = (a,b) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

y $(e_1, e_2) * (a,b) = (a,b)$

es decir, es como si no se hubiese "asteriscqueado" por el.

Entonces: 1 primero necesitamos (e_1, e_2) tal que

$$(a,b) * (e_1, e_2) = (a,b)$$

$$\Leftrightarrow (ae_1, be_1 + e_2) = (a,b)$$

$$\Rightarrow ae_1 = a \quad \wedge \quad be_1 + e_2 = b$$

$$\downarrow$$

$$e_1 = 1$$

$$\Rightarrow b + e_2 = b$$

$$\downarrow$$

$$e_2 = 0$$

veamos si se cumplen las 2 condiciones:

$(e_1, e_2) * (a,b) = (1,0) * (a,b) = (1a, 0 \cdot a + b) = (a,b)$ //

$(a,b) * (e_1, e_2) = (a,b) * (1,0) = (a \cdot 1, b \cdot 1 + 0) = (a,b)$ //

$\therefore (1,0)$ es el neutro en $(\mathbb{R}^2, *)$.

c) Los elementos invertibles son aquellos para los cuales $\exists (a,b)^{-1}$ tal que

$$(a,b) * (a,b)^{-1} = (e_1, e_2) \swarrow \text{neutro}$$

ya vimos que el neutro es $(1,0)$, entonces tenemos que ver para qué pares $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\exists (a,b)^{-1}$ tal que

$$(a,b) * (a,b)^{-1} = (1,0).$$

En efecto: llamemos (x,y) a $(a,b)^{-1}$

$(a,b) * (x,y) = (1,0)$

$\Leftrightarrow$ $(ax, bx+y) = (1,0)$

$\Rightarrow ax = 1 \quad \wedge \quad bx + y = 0$

$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$

$x = \frac{1}{a} \qquad\qquad y = -bx = \frac{-b}{a}$

$\therefore$ si existe $(a,b)^{-1}$, $(a,b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right)$

Pero para quienes existe? o más bien para quienes no? solo tendríamos problemas si $a = 0$

$\therefore$ todos los pares (a,b) con $a \neq 0$ tienen inverso y vale $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ //.

Veamos que (a,b)^-1 * (a,b) = (1, 0) tambien ya que no es conmutativo

(1/a, -b/a)*(a, b) = (a/a, -ba/a+b) = (1,0)

d) Los elementos idempotentes son aquellos que cumplen que $(a,b)*(a,b)=(a,b)$

veamos quienes son: $(a,b)*(a,b)=(a,b)$

$\Leftrightarrow (a^2, ab+b)=(a,b)$

$\Rightarrow a^2=a \quad \wedge \quad ab+b=b$

$a=1$ (único elemento idempotente en $\mathbb{R}$ con la multiplicación)

$b+b=b$

$2b=b$

$b=0$

$\therefore$ el único elemento idempotente es el neutro $(1,0)$. //

(*) Notemos que el neutro siempre es idempotente ya que cumple que $(a,b)*(e_1,e_2)=(a,b)$

<u>PARA TODO</u> (a,b), en particular para (e_1,e_2)

$\Rightarrow (e_1,e_2)*(e_1,e_2)=(e_1,e_2)$.

un pequeño error

Tambien se cumple para $a=0$ que $a^2=a$

En ese caso $ab+b$
$= 0b+b$
$= b$

es decir para cualquier b
se cumple la idempotencia si $a=0$
en otras palabras

x idempotente $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=(1,0) \\ \vee \\ x=(0,b) \text{ con } b\in\mathbb{R} \end{array} \right\}$

//

P3

Recordemos que la pre-imagen se "porta muy bien" con las operaciones ya sea $\cup$, $\cap$, $(\ )^c$

la que nos va a interesar esta vez

$$\bigcup f^{-1}(x_i) = f^{-1}\left(\bigcup x_i\right)$$

¿Y porque eso?

ES ÚTIL RECORDAR QUE TODO CONJUNTO SE PUEDE ESCRIBIR COMO LA UNIÓN DE SUS SINGLETONS

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$$

$\longleftarrow$ $\mathbb{R}$ ES NO-NUMERABLE $\Rightarrow$ ESTA UNIÓN ES NO NUMERABLE

$$\emptyset = \bigcup_{x \in \emptyset} \{x\}$$

$$\mathbb{N} = \bigcup_{x \in \mathbb{N}} \{x\}$$

PERO $\mathbb{N}$ y $\emptyset$ son numerables, por lo que esta unión es numerable!

UNIÓN NUMERABLE DE CONJUNTOS NUMERABLES ES NUMERABLE.

Sabiendo eso esta pregunta se vuelve harto más simple pues como

$$f: A \to \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow A = f^{-1}(\mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \cancel{A = f^{-1}(\bigcup}$$ [illegible]

$$\Rightarrow A = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\right)$$

$$\Rightarrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\{n\})$$

unión numerable

conjuntos numerables

Numerable!

P4 $B = \{x \in A \mid a * x = x * a\}$ $a \in A$ fijo

a) P.D.Q: $(\forall x, y \in B)$ $x * y \in B$

P.D.Q $(x*y)*a = a*(x*y)$ $\forall x, y \in B$

En efecto: $(x*y)*a = x*(y*a)$ (pq' $*$ es asociativo)

$= x*(a*y)$ (pq' $y \in B$)

$= (x*a)*y$ (pq' $*$ asocia)

$= (a*x)*y$ (pq' $x \in B$)

$= a*(x*y)$ (pq' $*$ asocia) //

b) P.D.Q: si e es neutro $\Rightarrow e \in B$

En efecto: si e es neutro

$e*x = x \wedge x*e = x$ $\forall x$ definición neutro

en particular $e*a = a \wedge a*e = a$

$\Rightarrow e*a = a*e$

$\Rightarrow e \in B$ //

c) P.D.Q si $x \in B$ tiene inverso $\Rightarrow x^{-1} \in B$

En efecto: $x \in B$ tiene inverso

$\Leftrightarrow \exists x^{-1}$ tq $\begin{cases} x * x^{-1} = e \\ x^{-1} * x = e \end{cases}$

P.D.Q $x^{-1} \in B$

$\Leftrightarrow x^{-1} * a = a * x^{-1}$

En efecto:
$$\begin{aligned}
x^{-1} * a &= (x^{-1} * a) * e && \leftarrow \text{el neutro no hace nada} \\
&= x^{-1} * (a * e) && \leftarrow * \text{ asocia} \\
&= x^{-1} * (a * (x * x^{-1})) && \leftarrow e = x^{-1} * x \\
&= x^{-1} * ((a * x) * x^{-1}) && \leftarrow * \text{ asocia} \\
&= x^{-1} * ((x * a) * x^{-1}) && \leftarrow x \in B \\
&= (x^{-1} * x) * (a * x^{-1}) && \leftarrow * \text{ asocia} \\
&= e * (a * x^{-1}) && \leftarrow e = x^{-1} * x \\
&= a * x^{-1} && \leftarrow \text{el neutro "no hace nada"}
\end{aligned}$$

$\therefore x^{-1} * a = a * x^{-1}$

$\therefore x^{-1} \in B$ //

P7 Sea $T = \{$ triángulos con vértices en $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\}$

P.D.Q $|T| = |\mathbb{N}|$

ya que los racionales son infinitos, existen infinitos triángulos con vértices en $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |T|.$$

ahora sólo falta ver que $|T| \leq |\mathbb{N}|$

Sea $$f : T \to \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$$
$$\Delta \mapsto T(\Delta) = (a, b, c, d, e, f)$$

donde (a,b), (c,d) y (e,f) son los vértices del triángulo.

P.D.Q: f es inyectiva

En efecto: si tenemos 3 pares de vértices iguales a otros 3 pares, necesariamente los triángulos que describen son iguales

$$\therefore f \text{ inyectiva} \Rightarrow |T| \leq |\mathbb{Q}^6|$$

Pero como $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{Q}^6| = |\mathbb{N}|$

$$\Rightarrow |T| \leq |\mathbb{N}|$$

Como $|T| \leq |\mathbb{N}| \wedge |\mathbb{N}| \leq |T|$, necesariamente $|\mathbb{N}| = |T|$.