P1

a) $f(n) = 1 - \sum_{K=0}^{n} \frac{K}{(K+1)!}$

$= 1 - \sum_{K=0}^{n} \frac{K+1-1}{(K+1)!}$

$= 1 - \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{K!} - \frac{1}{(K+1)!}$ ← telescópica

$= 1 - \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$

$= \frac{1}{(n+1)!}$

b) $g \circ f = \left(\frac{1}{(n+1)!} \right)^{-1} = (n+1)!$

claramente $Im(g \circ f) \subseteq \mathbb{N}$ pues $(n+1)! = \underset{\text{natural}}{1} \cdot \underset{\text{nat.}}{2} \cdots n \cdot \underset{\text{nat.}}{n+1}$

multiplicación de natural es natural.

claramente es inyectiva pues sea $x_1 \neq x_2$

digamos $x_1 < x_2$

$\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x_1$

$(g \circ f)(x_2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x_1 \cdot \underbrace{(x_1 + 1) \cdots x_2}$

como son enteros $\neq$s de 1

la multiplicación es $\neq$ de 1

así $g \circ f(x_1) < g \circ f(x_2)$

en particular $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$

$\therefore$ inyectiva.

sobreyectividad

No es sobreyectiva por ejemplo el 3 no tiene pre-imagen.

$1 \cdot 2 = 2$
$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ← ¿y los de entremedio no tienen a nadie !!?

$\Rightarrow$ NO SOBREYECTIVA.

$\therefore$ No biyectiva.

P2

I) $f \circ f(x) = f(f(x))$

$= f(A \cap (B \cup x))$

$= A \cap (B \cup (A \cap (B \cup x)))$

$= A \cap ((B \cup A) \cap (B \cup (B \cup x)))$

$= A \cap (B \cup A) \cap (B \cup B \cup x))$

$= A \cap (B \cup x)$ pues $A \subseteq B \cup A$.

$= f(x)$ //

II) CB: $n = 1$ demostrado recien

HI: asumimos que para algún n

$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ veces}}(x) = f(x)$

PDQ: $f^{(n+1)}(x) = f(x)$

pero $f^{n+1}(x) = (\underset{1 \text{ vez}}{f} \circ \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}})(x)$

POR HI $= (f \circ f)(x)$

POR CB $= f(x)$ //

III) Si $A \neq U \Rightarrow \exists\, x_0 \in A^c$

si tomo $x = \phi$

$\Rightarrow f(x) = A \cap B$

si tomo $x = \{x_0\}$

$$\Rightarrow f(x) = A \cap (B \cup \{x_0\})$$
$$= (A \cap B) \cup (A \cap \{x_0\})$$
$$= A \cap B \cup \phi$$
$$= A \cap B \;//$$

$\Rightarrow f$ no inyectiva.

si $B \neq \phi \Rightarrow \exists\, x_0 \in B$

si tomo $x = \phi$

$\Rightarrow f(x) = A \cap B$

si tomo $x = \{x_0\}$

$$\Rightarrow f(x) = A \cap (B \cup \{x_0\})$$
$$= A \cap B$$

Pues $\{x_0\} \subseteq B$

$\Rightarrow f$ no inyectiva //

iv) Si $A \neq U$

$\Rightarrow \exists x_0 \in A^c$

luego es imposible que $A \cap$ alguien $= \{x_0\}$ pues x_0 tendría que estar en A y en alguien y como $x_0 \in A^c$ x_0 NO ESTÁ EN A. $\Rightarrow$ NO SOBREYECTIVA

si $B \neq \phi$

$\Rightarrow \exists x_0 \in B$

Y ya sabemos que si $A \neq U$ f no es sobreyectiva, luego el único caso que vale la pena analizar es $A = U$

$\Rightarrow A \cap (B \cup X) = U \cap (B \cup X) = B \cup X$

como B contiene a alguien es imposible que esa unión de ϕ

$\Rightarrow$ NO SOBREYECTIVA

v) SABEMOS QUE

$A \neq U$ ó $B \neq \phi \Rightarrow f$ no inyectiva

$A \neq U$ ó $B \neq \phi \Rightarrow f$ no sobreyectiva.

por contrarrecíproca

f inyectiva $\Rightarrow \overline{A \neq U \text{ ó } B \neq \phi}$

f sobreyectiva $\Rightarrow \overline{A \neq U \text{ ó } B \neq \phi}$

POR De MORGAN f inyectiva $\Rightarrow A = U \wedge B = \phi$

f sob $\Rightarrow A = U \wedge B = \phi$

Luego f biyectiva $\Rightarrow A = U \wedge B = \phi$

$\Rightarrow f(x) = U \cap (\phi \cup X) = X$

ES LA IDENTIDAD! (°o°)

P3. Revisar Pauta Control Recuperativo 2010

P4 Separe la sumatoria entre los pares y los impares:

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k)^2 - \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

Luego resuelva utilizando sumatorias conocidas. La demostración por inducción está en la Pauta del Control 3 2016.

P5 Revisar Pauta Control 4 2014

P5

$n=0 \quad 3\cdot 0+2 = 2 < 1 \quad \times$

$n=1 \quad 3\cdot 1+2 = 5 < 2 \quad \times$

$n=2 \quad 3\cdot 2+2 = 8 < 4 \quad \times$

$n=3 \quad 3\cdot 3+2 = 11 < 8 \quad \times$

$n=4 \quad 3\cdot 4+2 = 14 < 16 \quad \checkmark$

PDQ: $\forall n \geq 4 \quad 3n+2 < 2^n$

CB $n=4$ $\checkmark$

HI asumimos para algún n $3n+2 < 2^n$

PDQ: $3(n+1)+2 < 2^{n+1}$

$= 3n+2+3 \overset{HI}{<} 2^n+3$ ¿$< 2^{n+1}$?

Veamos que $2^n+3 < 2^{n+1}$ $\forall n \geq 4$

CB $n=4$: $2^4+3=19<32=2^5$ ✓

HI para algún n $2^n+3<2^{n+1}$

PDQ $2^{n+1}+3<2^{n+2}$

pero $2^{n+2}=2^{n+1}\cdot 2$ usando HI

$$> (2^n+3)\cdot 2$$
$$= 2^{n+1}+6$$
$$> 2^{n+1}+3$$

$\therefore$ $2^n+3<2^{n+1}$ $\forall n\geq 4$ $\Longrightarrow$ $3n+2<2^n$ $\forall n\geq 4$ //