P1

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

☆☆

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\underbrace{(2i-1)(2i+1)}_{\text{tratemos de convertir esto en una suma.}}}$$

$$\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{A}{(2i-1)} + \frac{B}{(2i+1)}$$

(2n-1) y (2n+1) tienen pinta de ser algo así como términos consecutivos. Nos gustaría usar telescópica pero para eso necesitamos que esten separados en dos fracciones. Intentemos separarlos:

$$\frac{A(2i+1) + B(2i-1)}{\boxed{(2i+1)(2i-1)}} = \frac{1}{\boxed{(2i+1)(2i-1)}}$$

SON IGUALES!
SOLO FALTA VER
ARRIBA.

$2Ai + 1$

$$2Ai + A + 2Bi - B = 2i(A+B) + A - B = 1$$

ESE LADO NO TIENE "i"

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A+B &= 0 \\ A-B &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \\ B &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ** = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2(2i-1)} - \frac{1}{2(2i+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} \qquad a_{k+1} = 1/(2(i+1)-1) = 1/(2i+1)$$

NOTAR QUE
$2(i+1) - 1 = 2i+1$!
TENEMOS UNA TELESCÓPICA!

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+1-1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{2n}{2(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

P2

MA1101-7 Introducción al Álgebra
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.

$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}$
$\frac{n!}{(n-k)!k!} \leq \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}$
$\frac{(k+1)!}{k!} \leq \frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}$
$k+1 \leq n-k$
$2k \leq n-1$
$k \leq \frac{n-1}{2}$

P3a

$$\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{4n-2k}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}\binom{4n-2k}{j}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}\sum_{j=0}^{4n-2k}\binom{4n-2k}{j}$$

(Los términos que NO dependen de j salen)

$$=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}\underbrace{\sum_{j=0}^{4n-2k}\binom{4n-2k}{j}\cdot 1^j\cdot 1^{4n-2k-j}}$$

(Hacemos aparecer el binomio de Newton)

- Se cumple que el límite superior de la sumatoria es igual a la parte de arriba del coeficiente binomial ✓
- Se cumple que la sumatoria parte de 0 ✓
- Se cumple que la suma de los exponentes es igual a la parte de arriba de la sumatoria ✓

Ahora podemos aplicar Binomio de Newton y nos queda:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2n-k} (-1)^k \cdot (1+1)^{4n-2k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2n-k} (-1)^k \, 2^{2(2n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2n-k} (-1)^k \cdot 4^{2n-k}$$

ahora para usar Binomio de newton nos gustaría que

$$\binom{2n}{2n-k} = \binom{2n}{k}.$$

Veamos:

$$\binom{2n}{2n-k} = \frac{(2n)!}{(2n-k)!\,(2n-(2n-k))!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n-k)!\,k!} = \binom{2n}{k}$$

entonces nos queda:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k \, 4^{2n-k}$$

- Límite de sumatoria = parte de arriba? ✓
- K parte de 0? ✓
- exponentes suman 2n? ✓

Utilizando Binomio de Newton nuevamente, se obtiene

$$(-1+4)^{2n} = 3^{2n} = \boxed{9^n}$$

P3b $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1}\sum_{j=3}^{n+1}\binom{k}{2}\binom{j}{2}$

no depende de "j", así que podemos sacarlo de la primera sumatoria

$$= \sum_{k=3}^{n+1}\binom{k}{2}\underbrace{\sum_{j=3}^{n+1}\binom{j}{2}}$$

Desarrollemos esta sumatoria:

$$\sum_{j=3}^{n+1}\binom{j}{2} = \sum_{j=3}^{n+1}\frac{j!}{(j-2)!\,2!} = \sum_{j=3}^{n+1}\frac{j(j-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+1} j^2 - j = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=3}^{n+1} j^2 - \sum_{j=3}^{n+1} j\right]$$

¡ambas son conocidas!

pero cuando parten desde 1

Arreglemoslas:

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n+1} j^2 - 2^2 - 1^2 - \left(\sum_{j=1} j - 2 - 1\right)\right]$$

Formulas conocidas

Ojo: hasta "n+1"

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} - 4 - \cancel{1} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 2 + \cancel{1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2\right] = A$$

le llamaremos "A"

Entonces nos queda:

$$\sum_{K=3}^{n+1} \binom{K}{2} A$$ pero A no depende de "K"

$$\Rightarrow \quad = A\sum_{K=3}^{n+1} \binom{K}{2} = A \sum_{K=3}^{n+1} \frac{K!}{(K-2)!\,2!} = A \underbrace{\sum_{K=3}^{n+1} \frac{K(K-1)}{2}}$$

¡es la misma que teníamos antes!
Pero esta depende de K en vez de j
Eso da ¡LO MISMO!
el resultado es el mismo, el nombre de la variable es arbitrario

$$= A \cdot A = A^2 \quad //$$

P4

$$\sum_{K=0}^{n}(1-x)^K = \sum_{K=0}^{n}(-1)^K\binom{n+1}{K+1}x^K$$

mmm... me suena a binomio de Newton

pero ese $\binom{n+1}{K+1}$ ← debería ser un K

¡Cambio de indice!

$$\sum_{K=0}^{n}(-1)^K\binom{n+1}{K+1}x^K = \sum_{K=1}^{n+1}(-1)^{K-1}\binom{n+1}{K}x^{K-1}$$

pero los límites suben

dentro de la sumatoria los K bajan

AMBOS

ENTONCES LA PARTE DE ARRIBA DE LA SUMATORIA ES IGUAL A LA PARTE DE ARRIBA del COEFICIENTE y la de Abajo es un K ESTAMOS CASI LISTOS

pero el K parte de 1 !!

Bueno le agregamos el término 0 (pero también hay que quitarselo)

$$= \sum_{K=0}^{n+1}(-1)^{K-1}\binom{n+1}{K}x^{K-1} - \underbrace{(-1)^{0-1}}_{-1}\underbrace{\binom{n+1}{0}}_{1}\underbrace{x^{0-1}}_{x^{-1}}$$

$$= \sum_{K=0}^{n+1}(-x)^K\cdot\underbrace{(-x)^{-1}}_{\text{NO TIENE K}}\binom{n+1}{K} + x^{-1}$$

$$= (-x)^{-1} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-x)^{k} \boxed{?}^{\,n+1-k} + x^{-1}$$

SOLO FALTA
ESO !!

PERO SÍ ESTÁ
ES UN 1 ¡!!

$$= (-x)^{-1} (1-x)^{n+1} + x^{-1}$$

$$= \frac{-(1-x)^{n+1} + 1}{x}$$

$$= \frac{-(1-x)^{n+1} + 1}{1-(1-x)} = \sum_{k=0}^{n} (1-x)^{k}$$

P5

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \star$$

trabajemos primero el $k\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$$= \frac{\cancel{k}\,n!}{(n-k)!\,\cancel{k}(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$$

me gustaría formar un nuevo combinatorio

para ello $n-k = x-(k-1)$

$n-\cancel{k} = x-\cancel{k}+1$

$\boxed{n-1 = x}$

$\Rightarrow$ si arriba hubiese un $(n-1)!$ lo tendriamos... pero $n! = n\cdot(n-1)!$ //

$$\Rightarrow \star = \sum_{k=1}^{n} n\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

no depende de k

$$= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$$

Y RAZONAMOS IGUAL A LA P2

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-(k+1)}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k \cdot p \, (1-p)^{n-1-k}$$

$$= np \sum_{\boxed{k=0}}^{n-1} \binom{n-1}{\boxed{k}} p^{\boxed{k}} (1-p)^{n-1-\boxed{k}}$$

$$= np \, (1-p+p)^{n-1}$$

$$= np$$

(2n-1) y (2n+1) tienen pinta de ser algo así como términos consecutivos. Nos gustaría usar telescópica pero para eso necesitamos que esten separados en dos fracciones. Intentemos separarlos:

P6

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{18} = \sum_{k=0}^{18}\binom{18}{k}(x^2)^k\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{18-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{18}\binom{18}{k}x^{2k}\cdot x^{-1(18-k)} = \sum_{k=0}^{18}\binom{18}{k}x^{3k-18}$$

a) Término constante $\Leftrightarrow x^0$

Entonces necesitamos que $3k-18=0$

$$\Rightarrow 3k=18 \Rightarrow \boxed{k=6}$$

Entonces el término constante es el sexto de la sumatoria:

$$\binom{18}{6}x^{3\cdot 6-18} = \binom{18}{6} = \frac{18!}{6!(18-6)!}$$

$$= \frac{18!}{6!\,12!} = \frac{13\cdot \overset{7}{\cancel{14}}\cdot \overset{3}{\cancel{15}}\cdot \overset{4}{\cancel{16}}\cdot 17\cdot \cancel{18}}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}$$

$$= 13\cdot 7\cdot 3\cdot 4\cdot 17 = \boxed{18564}$$

b) Ya que la sumatoria va de 0 a 18, hay 19 término y por lo tanto hay sólo un término central, que es el término 9. OJO que en este caso justo calza con que el término 9 es el x^9, pero eso no neesariamente es así. El término 9 es el que corresponde a k=9

$$\text{término } 9:\ \binom{18}{9}x^{3\cdot 9-18} = \frac{18!}{9!\,9!}x^9 = \frac{18\cdot\ldots\cdot 10}{9!} = 48620\,x^9$$

c) necesitamos que $3k - 18 = 6$ para tener x^6

$$\Rightarrow 3k = 24 \Rightarrow k = 8$$

Entonces el valor del coeficiente de x^6 es $\binom{18}{8}$

$$= \frac{18!}{8!(18-8)!} = \frac{\cancel{18}^{2} \cdot 17 \cdot \cancel{16} \cdot \cancel{15} \cdot \cancel{14} \cdot 13 \cdot \cancel{12}^{2} \cdot 11}{\cancel{8} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 17 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 11 = \boxed{4862}$$