

MA1101-5 Introducción al Álgebra

Profesor: José Soto San Martín.

Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.

Fecha: Miércoles 11 de Julio del 2018



Auxiliar 11: Recuperativo

Resumen:

- **Conjunto potencia:** Dado A un conjunto $P(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A .

$$X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$$

Sea $f : A \rightarrow B$ una función.

- f es **inyectiva** $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A) f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
- f es **sobreyectiva** $\Leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists x \in A) f(x) = y$.
- f es **biyectiva** $\Leftrightarrow f$ es inyectiva y sobreyectiva.
- Si f es biyectiva, tiene inversa f^{-1} , y es tal que $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x)$.
- $g \circ f$ SOLO TIENE SENTIDO CUANDO $B \subseteq C$.

- $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva.
- $g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow g$ sobreyectiva.
- $g \wedge f$ inyectivas $\Rightarrow f \circ g$ inyectiva.
- $g \wedge f$ sobreyectivas $\Rightarrow f \circ g$ sobreyectiva.
- $g \wedge f$ biyectivas $\Rightarrow f \circ g$ biyectiva con $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- Dado $A' \subseteq A$, de define el conjunto **imagen de A'** como

$$f(A') = \{y \in B \mid (\exists x \in A') f(x) = y\}.$$

- Dado $B' \subseteq B$, de define el conjunto **preimagen de B'** como

$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$

- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- \mathcal{R} es **refleja** ssi $(\forall x \in A) x\mathcal{R}x$.
- \mathcal{R} es **simétrica** ssi $(\forall x, y \in A) x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

- \mathcal{R} es **antisimétrica** ssi $(\forall x, y \in A) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
- \mathcal{R} es **transitiva** ssi $(\forall x, y, z \in A) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- \mathcal{R} es relación de **orden** ssi es refleja, antisimétrica y transitiva.
- \mathcal{R} es relación de **equivalencia** ssi es refleja, simétrica y transitiva.

- Si \mathcal{R} es una relación de orden, diremos que es un **orden total** si para cada $x, y \in A (x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x)$. De lo contrario, se dirá que es un **orden parcial**.

- Si \mathcal{R} es de equivalencia y $x \in A$
 $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$ es la **clase de equivalencia de x** asociada a \mathcal{R} .
- A/\mathcal{R} es el conjunto de las clases de equivalencia inducidas por \mathcal{R} y se le llama **conjunto cociente**.

- **Inducción primera forma**
 $[(\forall n \geq n_0)p(n)] \Leftrightarrow [p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)(p(n) \Rightarrow p(n+1))]$.

- **Inducción segunda forma** $[(\forall n \geq n_0)p(n)] \Leftrightarrow [p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)\{(\forall k, n_0 \leq k \leq n)p(k) \Rightarrow p(n+1)\}]$.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}.$$

$$\text{Suma telescópica: } \sum_{k=p}^q a_k - a_{k-1} = a_q + a_{p-1}.$$

$$\text{Suma geométrica: } \sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \text{ si } r \neq 1.$$

P1. (*Funciones y sumatorias*) Considere las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(n) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$g(x) = x^{-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- (a) Expresar $f(n)$ en función de n (resolver la suma).
 (b) Verificar de $Im(g \circ f) \subseteq \mathbb{N}$. ¿Es $g \circ f$ inyectiva/ epiyectiva/ biyectiva?. Justifique.

P2. (*Funciones, Inducción y Conjuntos:*) Sea E conjunto de referencia y $A, B \subseteq E$. Se define:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto f(X) = A \cap (B \cup X) \end{aligned}$$

- (i) Pruebe de $f \circ f = f$
 (ii) Pruebe que $(\forall n \geq 1) f^n = f$.
 (iii) Si $A \neq E$ o $B \neq \emptyset$, pruebe que f no es inyectiva.
 (iv) Si $A \neq E$ o $B \neq \emptyset$, pruebe que f no es sobreyectiva.
 (v) ¿Cómo sería f si fuese una función biyectiva?

P3. (*Funciones y Relaciones*) Considere para $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, la función $f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_{a,b}(x) = ax + b$. Se define además el conjunto

$$G = \{f_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$$

- a) Pruebe que $id_{\mathbb{R}}$ pertenece a G .
 b) Pruebe que toda función $f_{a,b} \in G$ es biyectiva y muestre que $f_{a,b}^{-1} \in G$.
 c) Para $f_{a,b}, f_{c,d} \in G$ calcule $f_{a,b} \circ f_{c,d}(x)$ y muestre que $f_{a,b} \circ f_{c,d} \in G$.

Considere ahora el conjunto $S = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es función biyectiva}\}$, y la relación \mathcal{R} definida sobre S por

$$f \mathcal{R} g \Leftrightarrow g^{-1} \circ f \in G$$

- a) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
 b) Muestre que $[id_{\mathbb{R}}]_{\mathcal{R}} = G$

P4. (*Inducción y Sumatorias*) Calcule $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$ y luego demuestre su resultado por inducción.

P5. (*Funciones y Sumatorias*) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^n f(1 + \frac{1}{i}) = f(n+1).$$

P6. (*Inducción*) Determine el menor $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual es válida la desigualdad $3n + 2 < 2^n$.