P1

$x R y \iff b \mid ax+y$ ("b divide a $ax+y$" $\iff ax+y = kb$, $k \in \mathbb{Z}$)

a) P.D.Q R es refleja $\iff b \mid (a+1)$

$\Rightarrow$) Hip: R es refleja

$\iff x R x \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

$\iff b \mid ax+x$

$\iff b \mid x(a+1)$

y como se tiene que cumplir $\forall x$, necesariamente $b \mid (a+1)$

$\Leftarrow$) Hip: $b \mid a+1$

P.D.Q $x R x$

$\iff b \mid ax+x$

$\iff b \mid (a+1)x$

Como $b \mid (a+1)$, necesariamente $b \mid (a+1)x$

$\therefore x R x$

$\iff$ x es refleja.

b) P.D.Q R simétrica $\Rightarrow b \mid (a^2-1)$

en efecto: R simétrica $\Leftrightarrow$ $xRy \Rightarrow yRx$

$\Leftrightarrow$ $b \mid ax+y \Rightarrow b \mid ay+x$

$\Leftrightarrow$ $bk_1 = ax+y \Rightarrow bk_2 = ay+x$ $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$y = bk_1 - ax$

reemplazando y acá:

$bk_2 = a(bk_1 - ax) + x$

$\Leftrightarrow$ $bk_2 = abk_1 - a^2x + x$

$\Leftrightarrow$ $a^2x - x = abk_1 - bk_2$

$\Leftrightarrow$ $x(a^2-1) = b\underbrace{(ak_1 - k_2)}_{k_3 \in \mathbb{Z}}$

$\Leftrightarrow$ $bk_3 = x(a^2-1)$

$\Leftrightarrow$ $b \mid x(a^2-1)$

Pero como debe cumplirse $\forall x \in \mathbb{Z}$, necesariamente $b \mid a^2-1$

$\therefore$ R simétrica $\Rightarrow b \mid a^2-1$.

c) Basta tomar a=1, b=2

Luego existe x=4, y=6 y se tiene que 2 divide a 4+6 y 2 divide a 6+4 pero 4 no es igual a 6 por lo que la relación no es antisimétrica

P2 $\qquad\qquad$ L^1

P.D.Q: $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia

$\iff \mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva.

- P.D.Q: $\mathcal{R}$ es refleja

$\iff (x,y)\mathcal{R}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$(x,y)\mathcal{R}(x,y) \iff xy = xy$

ya que se cumple que $xy = xy \quad \forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\mathcal{R}$ es refleja.

- P.D.Q $\mathcal{R}$ es simétrica

$\iff (x,y)\mathcal{R}(w,z) \Rightarrow (w,z)\mathcal{R}(x,y) \quad \forall (x,y)(w,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\setminus\{0\}$

En efecto: $(x,y)\mathcal{R}(w,z)$

$\iff xz = yw$

$\iff yw = xz$

$\iff wy = zx$

$\iff (w,z)\mathcal{R}(x,y)$

$\therefore (x,y)\mathcal{R}(w,z) \iff (w,z)\mathcal{R}(x,y)$

En particular

$(x,y)\mathcal{R}(w,z) \Rightarrow (w,z)\mathcal{R}(x,y)$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ es simétrica.

- P.D.Q $\mathcal{R}$ es transitiva

$\iff [(x,y)\mathcal{R}(w,z) \wedge (w,z)\mathcal{R}(u,v)] \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(u,v)$

En efecto:

$(x,y)\mathcal{R}(w,z) \iff xz = yw$

$\Rightarrow \frac{w}{z} = \frac{x}{y}$ * es posible porque $z, y \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$(w,z)\mathcal{R}(u,v) \iff wv = zu$

$\Rightarrow \frac{w}{z} = \frac{u}{v}$ * es posible porque $z, v \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{w}{z} = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{u}{v} \Rightarrow xv = uy$

$\iff (x,y)\mathcal{R}(u,v)$.

$\therefore [(x,y)\mathcal{R}(w,z) \wedge (w,z)\mathcal{R}(u,v)] \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(u,v)$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ es transitiva.

ya que $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva, podemos concluir que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia

Sólo falta encontrar $[(0,2)]_R$, es decir $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} : (0,2) R (x,y)\}$

En efecto: $(0,2) R (x,y) \iff 0 \cdot y = 2x$

$\iff 0 = 2x \implies x = 0$

$\therefore [(0,2)]_R = \{(0,y) : y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

L4

P3 a) i. P.D.Q: Ψ es una relación de orden

- P.D.Q Ψ es refleja

$\iff x\Psi x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En efecto: $x\Psi x \iff (x-x) \in \mathbb{N}$

$x - x = 0 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x\Psi x$

$\therefore$ Ψ es refleja

- P.D.Q: Ψ es antisimétrica

$\iff [x\Psi y \wedge y\Psi x] \Rightarrow x=y \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$

En efecto:

$x\Psi y \iff \underbrace{(y-x)}_{a} \in \mathbb{N} \qquad \wedge \qquad y\Psi x \iff \underbrace{(x-y)}_{-a} \in \mathbb{N}$

Pero entonces tenemos que a y $-a$ son naturales. La única forma de que esto pase es $a=0 \iff y-x=0 \iff y=x$

$\therefore$ Ψ es antisimétrica

- P.D.Q: Ψ es transitiva

$\iff (x\Psi y \wedge y\Psi z) \Rightarrow x\Psi z$

En efecto: $x\Psi y \iff (y-x) \in \mathbb{N} \wedge y\Psi z \iff (z-y) \in \mathbb{N}$

Si $(y-x) \in \mathbb{N} \wedge (z-y) \in \mathbb{N}$, entonces $(y-x)+(z-y) \in \mathbb{N}$

$\iff (z-x) \in \mathbb{N} \iff x\Psi z$

$\therefore$ Ψ es transitiva.

Ya que Ψ es refleja, antisimétrica y transitiva, podemos concluir que Ψ es una relación de orden.

ii. ψ no es un orden total ya que no se cumple que

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad xRy \vee yRx$

Basta tomar $x = 1{,}2 \quad y = 3{,}1$

$xRy \Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{N}$ pero $3{,}1 - 1{,}2 = 1{,}9 \notin \mathbb{N}$

$yRx \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{N}$ pero $1{,}2 - 3{,}1 = -1{,}9 \notin \mathbb{N}$.

b) i. P.D.Q Φ es una relación de equivalencia

- P.D.Q Φ es refleja y transitiva

  ya que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, de (a) i. podemos concluir que Φ es refleja y transitiva.

- P.D.Q Φ es simétrica

  $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R} \quad xRy \Rightarrow yRx$

En efecto: $xRy \Leftrightarrow \underbrace{(y-x)}_{a} \in \mathbb{Z}$

si $a \in \mathbb{Z}$, $-a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -(y-x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow yRx$

$\therefore$ Φ es simétrica.

ya que Φ es refleja, simétrica y transitiva, podemos concluir que Φ es una relación de equivalencia.

ii. $[p]_{\Phi} = \{ x \in \mathbb{R} : pRx \}$

$pRx \iff (x-p) \in \mathbb{Z}$

$\iff x-p = k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = p+k$ pero como $p, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

$\therefore [p]_{\Phi} = \{ x \in \mathbb{Z} \}$

(iii) P.D.Q $\mathbb{R}/_\Phi = \{[x]_\Phi : x \in [0,1)\}$

Para demostrar esto, tomaremos $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y demostraremos que $[a]_\Phi = [x]_\Phi$ $x \in [0,1)$.

Sea $a \in \mathbb{R}$ $\quad [a]_\Phi = \{m \in \mathbb{R} : a \Phi m\}$.

En efecto: $a \Phi m \iff m-a \in \mathbb{Z}$.

Función parte entera

Pero podemos escribir a como $(a-[a])+[a]$,

entonces
$$m-a = m-\big[(a-[a])+[a]\big]$$
$$= m-(a-[a])-[a]$$

entonces nosotros queremos que

$$m-(a-[a])-[a] \in \mathbb{Z}$$

Pero sabemos que $[a] \in \mathbb{Z}$, por lo que solo falta ver que $m-(a-[a]) \in \mathbb{Z}$.

Pero también sabemos que $(a-[a]) \in [0,1)$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Sea $b = a-[a]$ con $b \in [0,1)$

Tenemos entonces que $m-b \in \mathbb{Z} \Rightarrow m-a \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, los "m" que se relacionan con "a" son los mismos que se relacionan con algún $b \in [0,1)$.

y por lo tanto $[a]_\Phi = [x]_\Phi$ con $x \in [0,1]$ $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\therefore \mathbb{R}/_\Phi = \{[x]_\Phi : x \in [0,1)\}$$