MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto San Martín.
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.
Fecha: Jueves 3 de mayo de 2018

Auxiliar 8: Relaciones

P1. Dados $a, b \in \mathbb{N}$ fijos, con $a \geq 1$ y $b \geq 2$ se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow b|ax+y, \text{ es decir, } b \text{ divide a } ax+y$$

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es refleja si y sólo si $b|(a+1)$.

(b) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $b|(a^2-1)$.

(c) Determine algún valor para a y b tal que $\mathcal{R}$ no sea antisimétrica.

P2. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ por $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$. Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y determine $[(0,2)]_{\mathcal{R}}$, es decir, la clase de equivalencia de $(0,2) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$.

P3. (a) Se define en $\mathbb{R}$ la relación Ψ dada por: $x\Psi y \Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{N}$.

i. Demuestre que Ψ es una relación de orden.

ii. Indique si es o no una relación de orden total. Justifique.

(b) Considere ahora la relación Φ definida en $\mathbb{R}$ como $x\Phi y \Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{Z}$.

i. Demuestre que Φ es una relación de equivalencia.

ii. Dado $p \in \mathbb{Z}$, calcule la clase de equivalencia $[p]_\Phi$.

iii. Demustre que el conjunto cuociente de Φ es $\{[x]_\Phi \mid x \in [0,1)\}$.

P4. *[Propuesto]* Sean E_1, E_2 dos conjuntos no vacíos y $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ relaciones de orden definidas en E_1 y E_2 respectivamente.

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ definida en $E_1 \times E_2$ por $(x,y)\mathcal{R}(u,v) \Leftrightarrow [x\mathcal{R}_1 u \wedge y\mathcal{R}_2 v]$ es una relación de orden en $E_1 \times E_2$.

(b) Si tanto E_1 como E_2 tienen al menos dos elementos cada uno, pruebe que $\mathcal{R}$ no es una relación de orden total.