a) P.D.Q $f^{-1}(g^{-1}(C_0)) = (g \circ f)^{-1}(C_0)$

Notemos primero que esto no es obvio porque estamos hablando de preimagen, no de función inversa (y aunque lo fuera necesitaríamos biyectividad)

$\subseteq]$ Sea $x \in f^{-1}(g^{-1}(C_0))$

$\Leftrightarrow \exists y \in g^{-1}(C_0) \quad f(x) = y$ def. de $y \in g^{-1}(C_0)$

$\Leftrightarrow \exists y \ \exists \bar{y} \in C_0 \quad \underset{(2)}{g(y) = \bar{y}}, \quad \underset{(1)}{f(x) = y}$

reemplazando (1) en (2)

$\Rightarrow g(f(x)) = \bar{y}$

$\Leftrightarrow g \circ f(x) = \bar{y}$

Pero como $\bar{y} \in C_0$ se tiene que $x \in (g \circ f)^{-1}(C_0)$

$\therefore f^{-1}(g^{-1}(C_0)) \subseteq (g \circ f)^{-1}(C_0)$

$\supseteq]$ Sea $x \in (g \circ f)^{-1}(C_0)$

$\Leftrightarrow \exists y \in C_0 \quad g \circ f(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists y \in C_0 \quad g(f(x)) = y$

Sea $\bar{y} = f(x)$

$\Rightarrow \exists y \in C_0 \quad g(\bar{y}) = y$

$\Rightarrow \bar{y} \in g^{-1}(C_0)$ pues $y \in C_0$

pero $f(x) = \bar{y}$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(C_0))$ pues $\bar{y} \in g^{-1}(C_0)$

$\therefore (g \circ f)^{-1}(C_0) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(C_0))$

$\therefore f^{-1}(g^{-1}(C_0)) = (g \circ f)^{-1}(C_0)$ //

1. D.Q: $g\circ f(A_0) = g(f(A_0))$

notemos que dado $x \in A$ podemos decir que $g\circ f(x) = g(f(x))$, pero esto no es directo para $\forall$ imagen.
el conjunto

$\subseteq$) Sea $y \in g\circ f(A_0)$

$\Leftrightarrow \exists x \in A_0 \quad g\circ f(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists x \in A_0 \quad g(\underbrace{f(x)}_{\bar{x}}) = y$

Sea $\bar{x} = f(x) \Rightarrow \bar{x} \in f(A_0)$ pues $x \in A_0$

Además $g(\bar{x}) = y$

$\Rightarrow y \in g(f(A_0))$ pues $\bar{x} \in f(A_0)$ //

$\therefore g\circ f(A_0) \subseteq g(f(A_0))$

$\supseteq$) Sea $y \in g(f(A_0))$

$\Leftrightarrow \exists x \in f(A_0) \quad g(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists x \ \exists \bar{x} \in A_0 \quad \underset{(1)}{f(\bar{x}) = x}, \quad \underset{(2)}{g(x) = y}$

reemplazando (1) en (2)

$\Rightarrow g(f(\bar{x})) = y$

$\Leftrightarrow g\circ f(\bar{x}) = y$

$\Rightarrow y \in g\circ f(A_0)$ pues $\bar{x} \in A_0$ //

$\therefore g\circ f(A_0) = g(f(A_0))$ //