P1a) Por contradicción, sea

$(p \vee q \iff p \wedge r)$ V y $(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)$ F

De aquí podemos deducir que si p es V entonces $p \vee q$ es V, por lo que $p \wedge r$ es V y entonces r tiene que ser V.

$\therefore$ $p \Rightarrow r$ es V

Para que esto sea falso, alguno de los 2 implicas debe serlo. Pero ya sabemos que $p \Rightarrow r$ es V, por lo que $q \Rightarrow p$ tiene que ser F.

$\Rightarrow$ q es V y p es F.

Pero si q es V, $p \vee q$ también lo es. Pero $p \vee q \iff p \wedge r$ es V, por lo que si $p \vee q$ es V, $p \wedge r$ tiene que serlo y en particular p debe ser V

$\rightarrow|\leftarrow$

no puede ser que q sea V y p F.

$\therefore$ la proposición es tautología.

b) $(\bar{p} \vee q) \Rightarrow r$ es Falso

$\Rightarrow$ $(\bar{p} \vee q)$ es V $\wedge$ r es F

ya que r es F, tenemos algo de la forma

$F \Rightarrow [\quad]$, por lo que la proposición es V.

P2)

$(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$

"Existe un "x" tal que se cumple p(x) y se cumple q(x)".

Pero nos dicen que sólo hay 1 "x" tal que se cumple p(x) y lo mismo para q(x). Por lo tanto, necesariamente ese "x" es el mismo para p(x) que para q(x) y es el único que hay.

$\Rightarrow (\exists! x)(p(x) \wedge p(y))$

P3 Primero notemos lo siguiente, $\forall k \in \mathbb{N}$: $4 = u_k + \frac{3}{u_{k+1}} \Leftrightarrow u_{k+1} = \frac{3}{4-u_k}$ (1)

(la recurrencia es dato del problema)

Por inducción, probemos que $u_k = \frac{3(3^k-1)}{3^{k+1}-1}$.

· Caso base: para $n=1$, tenemos que $u_1 = \frac{3(3^1-1)}{3^{1+1}-1} = \frac{3\cdot 2}{8} = \frac{3}{4}$, lo cual se cumple observando que $4 = \frac{3}{u_1}$.

· Hip. Ind.: supongamos que para $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $u_k = \frac{3(3^k-1)}{3^{k+1}-1}$.

Probemos que se tiene para $k+1$. En efecto:

$$u_{k+1} \overset{(1)}{=} \frac{3}{4-u_k} \overset{(HI)}{=} \frac{3}{4-\frac{3(3^k-1)}{3^{k+1}-1}} = \frac{3(3^{k+1}-1)}{4\cdot 3^{k+1}-4-\underbrace{3\cdot 3^k}_{3^{k+1}}+3} = \frac{3(3^{k+1}-1)}{4\cdot 3^{k+1}-3^{k+1}-1} = \frac{3(3^{k+1}-1)}{3\cdot 3^{k+1}-1}$$

$$= \frac{3(3^{k+1}-1)}{3^{k+2}-1} \text{ (tesis)}$$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{3(3^n-1)}{3^{n+1}-1}$.

PDQ: $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\sqrt{2(a_n^2 - 4)}$ es múltiplo de 4.

CB: $n = 1$

$$\sqrt{2(6^2 - 4)} = \sqrt{64} = 8 = 4 \cdot 2$$ es múltiplo de 4

$\Leftrightarrow V$

HI: Supongamos que:

$\sqrt{2(a_n^2 - 4)}$ es múltiplo de 4

PI: PDQ: $\sqrt{2(a_{n+1}^2 - 4)}$ es múltiplo de 4

$$\begin{aligned}
\sqrt{2(a_{n+1}^2 - 4)} &= \sqrt{2([a_n^2 - 2]^2 - 4)} \\
&= \sqrt{2(a_n^4 - 4a_n^2)} \\
&= \sqrt{2a_n^2(a_n^2 - 4)} \\
&= |a_n| \underbrace{\sqrt{2(a_n^2 - 4)}}_{4K \quad (HI)} \\
&= 4(|a_n| \cdot K)
\end{aligned}$$

$\therefore$ $\sqrt{2(a_{n+1}^2 - 4)}$ es múltiplo de 4. ■

P4] P.D.Q $\forall n \geq 6 \quad F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

En efecto: caso Base: $n=6$, $n=7$

$$F_6 = 8 \quad 8 > \left(\frac{3}{2}\right)^7 \approx 7{,}5$$
$$F_7 = 13 \quad 13 > \left(\frac{3}{2}\right)^6 \approx 11{,}4$$

} 2 casos Bases ya que siempre se usan los dos anteriores

H.I: $\forall k \leq n \quad F_k > \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

Paso inductivo: P.D.Q $F_{n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \underset{\text{H.I}}{>} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{6+4}{9}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{10}{9} > \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

pues $\frac{10}{9} > 1$

$\therefore F_{n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$\therefore \forall n \geq 6 \quad F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

PDQ: todo natural $n \geq 2$ puede ser escrito como producto de primos

CB: 2 es primo $\Rightarrow$ 2 es producto de primos (ÉL SOLITO)

HI: (Inducción fuerte)

Asumimos que $\forall k \leq n$ k se escribe como producto de primos.

PI: PDQ: $n+1$ es producto de primos

CASO 1: si $n+1$ es primo, estamos listos

CASO 2: si $n+1$ no es primo, entonces

$$n+1 = m \cdot p, \quad \text{con} \quad m, p \leq n$$

luego por H.I. m y p son producto de primos

$\therefore$ $m \cdot p$ es producto de primos.