i) P.D.Q $(\forall x)(\exists y)(p(x) \Rightarrow p(y))$

Basta tomar $y = x$ y entonces

$$(\forall x)(\exists x)[p(x) \Rightarrow p(x)] \Leftrightarrow V$$

$\therefore$ la proposición es verdadera.

ii) P.D.Q $(\exists y)(\forall x)(p(x) \Rightarrow p(y))$

Existen 2 casos posibles:

1) $(\exists y)p(y)$: Para al menos un "y", se cumple $p(y)$

2) $\overline{(\exists y)p(y)} \Leftrightarrow (\forall y)\overline{p(y)}$: No existe ningún "y" con el que se cumpla $p(y)$, es decir, $p(y)$ nunca se cumple

Veamos el caso 1): Tenemos algo de la forma $[p(x) \Rightarrow V] \Leftrightarrow V$

En el segundo caso, tenemos $p(x) \Rightarrow F]$, pero si $(\forall y)\overline{p(y)}$, entonces $(\forall x)p(x)$ es F

y tenemos $F \Rightarrow F \Leftrightarrow V$

$\therefore$ la proposición es verdadera.

P2) P.D.Q $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

Caso Base: $n=0$

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0\cdot x = 1$$

$$1 \geq 1 \checkmark$$

H.I: $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $(1+x)^n \geq 1+nx$

Paso inductivo: P.D.Q $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

En efecto: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \underset{\uparrow H.I}{\geq} (1+nx)(1+x)$

$$= 1+x+nx+nx^2$$
$$= 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$$

$\therefore (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

P3) P.D.Q $\forall n \geq 0 \quad 4^{2n+1}+3^{n+2}$ es múltiplo de 13

En efecto: Caso Base: $n=0$

$$4^{0+1}+3^{0+1} = 13 = 13\cdot 1 \checkmark$$

H.I: $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $4^{2n+1}+3^{n+2}$ es múltiplo de 13

Paso inductivo: P.D.Q $4^{2(n+1)+1}+3^{(n+1)+1}\left(= 4^{2n+3}+3^{n+2}\right)$ es múltiplo de 13

En efecto: $4^{2n+3}+3^{n+3} = 4^{2n+1}\cdot 4^2 + 3^{n+2}\cdot 3$

$$= 16(4^{2n+1}) + 3\cdot 3^{n+2} \qquad (*)$$
$$= (13+3)(4^{2n+1}) + 3\cdot 3^{n+2}$$
$$= 13\cdot 4^{2n+1} + 3\cdot 4^{2n+1} + 3\cdot 3^{n+2}$$
$$= 13\cdot 4^{2n+1} + 3\underbrace{(4^{2n+1}+3^{n+2})}_{13K \leftarrow H.I}$$

$$= 13(4^{2n+1}+3K)$$

$\therefore 4^{2n+3}+3^{n+3}$ es múltiplo de 13

$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \quad 4^{2n+1}+3^{n+2}$ es múltiplo de 13

[Alternativamente, desde $(*)$

$$= 16(\underbrace{4^{2n+1}+3^{n+2}}_{13K \leftarrow H.I} - 3^{n+2}) + 3\cdot 3^{n+2}$$

$$= 16\cdot 13 - 16\cdot 3^{n+2} + 3\cdot 3^{n+2}$$
$$= 16\cdot 13 - 3^{n+2}(16-3) = 16\cdot 13 - 3^{n+2}\cdot 13 = 13(16-3^{n+2}) \quad //$$]

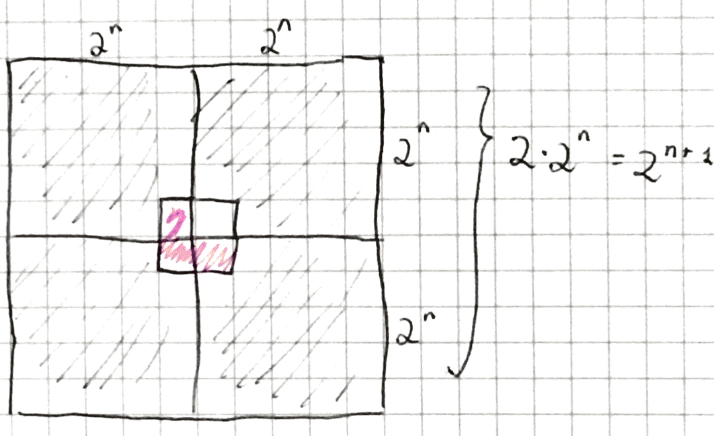
P4) caso base $n=1$

✓

H.I $\exists n$ tal que se cumple la propiedad para un cuadrado de $2^n \times 2^n$

Paso inductivo: para $2^{n+1} \times 2^{n+1}$

$\Leftrightarrow$ $2 \cdot 2^n \times 2 \cdot 2^n$



Por H.I, si dividimos el cuadrado en 4 cuadrados más pequeños en cada uno de ellos se cumple la propiedad.
Podemos poner todos los cuadrados "sobrantes" al centro y luego agregar un triómino más (el rosado) y se tiene lo pedido

$\therefore$ Todo tablero de ajedrez de $2^n \times 2^n$ al que le falta una casilla es teselable por trióminos.