MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto San Martín.
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.
Fecha: Jueves 29 de Marzo.

Auxiliar 3: Control 1

P1. Lógica

(a) Demuestre, sin usar tablas de verdad, que

$$(p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)].$$

(b) Sean p, q, r tres proposiciones tales que $(\overline{p} \vee q) \Rightarrow r$ es falsa. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición. Justifique su respuesta.

$$r \Rightarrow [p \Leftrightarrow \overline{q \vee r}]$$

P2. Cuantificadores

Sean $p(x), q(x)$ dos funciones proposicionales. Muestre que si

$$(\exists! x)(p(x)) \wedge (\exists! x)(q(x)),$$

entonces la siguiente implicación es verdadera

$$(\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists! x)(p(x) \wedge q(x)).$$

P3. Recurrencias

(a) Considere la siguiente colección de números reales, definida por:

$$4 = \frac{3}{u_1} = u_1 + \frac{3}{u_2} = u_2 + \frac{3}{u_3} = ... = u_n + \frac{3}{u_{n+1}}$$

Demuestre que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n = \dfrac{3(3^n - 1)}{3^{n+1} - 1}$.

(b) Considere la sucesión definida por la siguiente recurrencia:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2, \quad a_1 = 6$$

Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, el número $\sqrt{2(a_n^2 - 4)}$ es múltiplo de 4.

P4. Inducción Fuerte

(a) Recuerde que la sucesión de Fibonacci es una serie de números naturales $F_0, F_1, ..., F_n, F_{n+1}...$ que cumplen que: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $\forall n \geq 2$. Demuestre que:

$$F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \ \forall n \geq 6$$

(b) El teorema fundamental de la aritmética nos dice que todo número natural mayor o igual a 2 se puede escribir como el producto de factores primos. Usando inducción fuerte demuestre este teorema.