MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 10: Estructuras Algebraicas

18 de julio de 2018

- Una **ley de composición interna** (o *l.c.i.*) es una operación definida sobre un conjunto A (no vacío) que se queda en él mismo cuando se aplica. En resumen, una función así:

$$\star : AxA \to A$$
$$(x, y) \to x \star y$$

- Una **estructura algebraica** será un conjunto no vacío dotado de una *l.c.i* que se aplique sobre él. Lo anotaremos de la forma $(A, \star)$ (Por ejemplo $(\mathbb{N}, +)$ es una estructura algebraica)
- Las operaciones tienen las siguientes gracias:
  - $\star$ asocia si $\forall x, y, z \in A: \ (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$
  - e es elemento neutro de $\star$ si $\forall x \in A: \ e \star x = x \star e = x$
  - si e es elemento neutro de $\star$ y $x \in A$, entonces diremos que x tiene inverso si existe y en A tal que $x \star y = y \star x = e$
  - $\star$ es conmutativa si $\forall x, y \in A x \star y = y \star x$
  - a será idempotente si $a \star a = a$
  - a será absorbente si $\forall x, a \star x = x \star a = a$
  - a será cancelable si para todo y, z se tiene: $a \star z = a \star y \Rightarrow z = y$ y además $z \star a = y \star a \Rightarrow z = y$
  - Si $(A, \star, \Delta)$ es e.a. con dos operaciones, diremos que Δ distribuye respecto a $\star$ si para todo x, y, z se tiene $x\Delta(y \star z) = (x\Delta y) \star (x\Delta z)$ y $(x \star y)\Delta z = (x\Delta z) \star (y\Delta z)$
- De existir el neutro de una e.a., este es único
- De existir inversos en una e.a. con operación **asociativa**, estos son únicos
- Dadas dos ee.aa. $(A, \star), (B, \Delta)$ llamaremos homomorfismo de $(A, \star)$ en (B, Δ) a la función f que hace lo siguiente:

$$\forall x, y \in A, \ f(x \star y) = f(x)\Delta f(y)$$

- Si f es:
  - inyectiva, se llamará **monomorfismo**
  - epiyectiva, se llamará **epimorfismo**
  - biyectiva, se llamará **isomorfismo** entre $(A, \star)$ y (B, Δ)
  - Si $(A, \star) = (B, \Delta)$ el homomorfismo se llamará **endomorfismo** (si además es biyectivo, es llamado **automorfismo**)

P1.- Sea $(S, \star)$ una e.a. con neutro e y $\star$ una operación asociativa. Para a fijo, invertible para $\star$ y con inverso a^{-1} en S se define la operación Δ en S como:

$$\forall x, y \in S, \ x\Delta y = x \star a \star y$$

a) Demuestre que la ley Δ es asociativa y tiene neutro (encuéntrelo!)

b) Caracterice elementos invertibles según Δ y calcule el inverso de a respecto a Δ.

P2.- Se define en $\mathbb{R}^2$ la *l.c.i.* $\heartsuit$ por:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2, \ (a, b) \heartsuit (c, d) = (ac, bc + d)$$

a) Estudie la conmutatividad de $\heartsuit$

b) Estudie la asociatividad de $\heartsuit$

c) Determine el neutro de $\heartsuit$

d) Encuentre que elementos son invertibles según $\heartsuit$

e) Determine elementos idempotentes para $\heartsuit$

P3.- Sea $(G, \leaf)$ una estructura en la que $\leaf$ es una *l.c.i.* asociativa, conmutativa e idempotente.

Se define en G la relación $\mathcal{R}$ por $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leaf y = y$. Demuestre que $\forall a, b \in G$ se cumple:

a) $a\mathcal{R}(a \leaf b)$ y $b\mathcal{R}(a \leaf b)$

b) Si $\exists x \in G$ tal que $x\mathcal{R}a \wedge x\mathcal{R}b$ entonces $xR(a \leaf b)$ (Son ambas condiciones necesarias?)

P4.- Sea f un homomorfismo, no necesariamente epiyectivo, de $(A, \oslash)$ en $(B, \Diamond)$, con neutros e_A y e_B, respectivamente. Demuestre:

a) $e_B = f(e_A)$

b) Si $a \in A$ tiene inverso b para $(A, \oslash)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para $(B, \Diamond)$

c) Supongamos que todos los elementos son invertibles. Un homomorfismo $f : A \to B$ de $(A, \oslash)$ en $(B, \Diamond)$ es un monomorfismo, si y solo si $f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\}$