P1

Aux 15

a) Fijémonos en la forma del polinomio q.

spoiler: es polinomio

$$\boxed{q(x) = p(ix)}$$

$$q(x) = a_0 + a_1(ix) + a_2(ix)^2 + \dots + a_n(ix)^n$$
$$= a_0 + (a_1 \cdot i)x + (a_2 \cdot i^2)x^2 + \dots + (a_n i^n)x^n$$

¡Pero este es un polinomio!

$$\Rightarrow q(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k \cdot i^k}_{\text{a esto lo podemos llamar } b_k} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^k.$$

b) $\Rightarrow$) Si $p=q$, entonces tenemos igualdad término a término. Estudiaremos a los términos cuyo índice sea un no-múltiplo de 4.

Caso 1: $k \equiv_4 1$.

$\Rightarrow a_k = b_k$

$a_k = i^{4p+1} \cdot a_k$ ← recordemos que k se puede escribir como $4p+1$ con $p \in \mathbb{Z}$.

$\cancel{a_k = i^{4p} \cdot a}$

$\Rightarrow a_k = \cancel{i^{4p}}^{1} \cdot i \cdot a_k$

$\Rightarrow \boxed{a_k = i \cdot a_k}$ ← aquí, usaremos un trucazo.

Como $a_k = i \cdot a_k$

$\Rightarrow i \cdot a_k = i^2 \cdot a_k = -a_k$

$\Rightarrow a_k = i \cdot a_k = -a_k \Rightarrow 2a_k = 0 \Rightarrow a_k = 0$ //

Caso 2: $k \equiv_4 2$.

Análogo al anterior:

$a_k = i^{4p+2} \cdot a_k$

$\Rightarrow a_k = -a_k \Rightarrow 2a_k = 0 \Rightarrow \boxed{a_k = 0}$ //.

Caso 3: $k \equiv_4 3$

similar al caso 1:

$a_k = i^{4p+3} \cdot a_k$

$a_k = -i a_k$

$\Rightarrow -i a_k = -a_k \Rightarrow a_k = -i a_k = -a_k$

$\Rightarrow a_k = -a_k \Rightarrow 2a_k = 0 \Rightarrow \boxed{a_k = 0}$ //

Demostrando una de las dos implicancias.

$\Leftarrow$ Si todos los coeficientes no múltiplos de 4 valen cero, entonces:

$a_k = 0 = i \cdot a_k = b_k = 0$

Para todos los coeficientes no-múltiplos-de-4 en-el-**índice**, tendremos igualdad.

Falta ver a los que si tienen múltiplo de 4 en el índice

$$k \equiv_4 0 \Rightarrow a_k \stackrel{!}{=} i^{4p} \cdot a_k$$ ← esto es lo que nos gustaría para tener igualdad de pols.

$$\Rightarrow a_k = 1 \cdot a_k = a_k \checkmark\checkmark$$

Lo que es cierto, hallando lo pedido y concluyendo la demostración.

P2) Recordemos como se divide: (lol).

$$\begin{array}{l} a : b = q \\ r \end{array} \Longleftrightarrow a = b \cdot q + r$$

Donde a es el dividendo, b el divisor, q el cuociente y r el resto.

Usando la información del enunciado:

Si tomamos el polinomio y le restamos tres, será divisible por $(x-1)$, o sea, 1 será raíz de $p(x)-3$.

$$\Rightarrow \cancel{2(1)^4 - 1^3 + 2\cdot 1^2 + 19 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \alpha\cdot(1)^4 - 1^3 + \beta\cdot 1^2 + 10\cdot 1 - 2\alpha - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha - 1 + \beta + 10 - 2\alpha - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \beta - \alpha = -6$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha - \beta = 6}$$

Ahora, usando el algoritmo de división

$$a = b\cdot q + r \Rightarrow \frac{a-r}{b} = q \text{, reemplazando:}$$

Si $x = 2$:

$$\frac{p(x)-3}{(x-1)} = 21 \Rightarrow \frac{p(2)-3}{2-1} = 21$$

$$\Rightarrow 16\alpha - 8 + 4\beta + 20 - 2\alpha - 3 = 21$$

$$\Rightarrow 14\alpha + 4\beta + 9 = 21 \Rightarrow \boxed{7\alpha + 2\beta = 6}$$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 6 \\ 7\alpha + 2\beta = 6 \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta = 7\alpha + 2\beta$$

$$\Rightarrow -6\alpha = 3\beta$$

$$\Rightarrow -2\alpha = \beta$$

Reemplazando:

$$\alpha - (-2\alpha) = 6 \Rightarrow 3\alpha = 6 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

$$2 - \beta = 6 \Rightarrow \boxed{\beta = -4}$$

El polinomio finalmente es:

$$p(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 2\alpha.$$

P3) En esta parte, es importante tomar en cuenta el <u>tanteo</u>.

Nos entregan un hint:

- Raíz entera negativa.
- Raíz racional positiva.

Probando con numeritos, nuestros primeros candidatos deben ser $-1, -2, -3, \ldots$

(En el caso de las fracciones, $1/2, 1/3, 2/3, 1/4$).

Factorizamos

(Habiendo descubierto por tanteo que -2 y $1/2$ son las raíces del hint)

$$2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10 : (x-(-2)) = 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5$$

$$\begin{array}{l}
2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10 \\
-(2x^4 + 4x^3) \\
\hline
0 \quad -5x^3 + 2x^2 + 19x - 10 \\
\quad -(-5x^3 - 10x^2) \\
\hline
\quad 0 + 12x^2 + 19x - 10 \\
\quad\quad -(12x^2 + 24x) \\
\hline
\quad\quad 0 \quad -5x - 10 \\
\quad\quad\quad 0 /\!/
\end{array}$$

$\rightarrow p(x) = (2x^3 - 5x^2 + 12x - 5)(x+2)$

Ahora con $(x - 1/2)$:

$$(2x^3 - 5x^2 + 12x - 5) : (x - 1/2) = 2x^2 - 4x + 10$$

$$\begin{array}{l}
-(2x^3 - x^2) \\
0 \quad -4x^2 + 12x - 5 \\
\quad -(-4x^2 + 2x) \\
\quad 0 \quad 10x - 5 \\
\quad\quad 0 /\!/
\end{array}$$

$$\Rightarrow P(x) = (x+2)(x-\tfrac{1}{2})\underbrace{(2x^2-4x+10)}_{}$$

¡falta resolver esto, pero ustedes saben hacerlo!

$$\Rightarrow 2x^2-4x+10=0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4(2)(10)}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{-64}}{4} = \boxed{1 \pm 2i}$$

Quedando finalmente:

$$P(x) = (x+2)(x-\tfrac{1}{2})(x-(1+2i))(x-(1-2i)) \in \mathbb{C}[x]$$

(y la factorización en los reales es la anterior, $(x+2)(x-\tfrac{1}{2})(2x^2-4x+10)$.)

P4 a) Notemos lo siguiente:

$p(x)$ divide a $q(x)$

$\Leftrightarrow$

todas las raíces de $p(x)$ son también raíces de $q(x)$ (en una multiplicidad al menos la de $p(x)$).

Entonces, veamos que las raíces de x^2+x+1 son también raíces de $x^{3n_1}+x^{3n_2+1}+x^{3n_3+2}$.

Notemos que las raíces de x^2+x+1 son ¡raíces cúbicas de la unidad!

Entonces, al elevarlas al cubo, darán 1.

Luego, $x^{3n_1}+x^{3n_2+1}+x^{3n_3+2}$ ← x raíz cúbica de la unidad.

$$= (x^3)^{n_1} + (x^3)^{n_2}\cdot x + (x^3)^{n_3}\cdot x^2$$

$$= 1 + x + x^2 = 0$$ (pues las raíces de la unidad solucionan esta ecuación)

- En este caso (y en general) no nos preocupamos de la multiplicidad de las raíces, pues tienden a dar todas distintas.
- Fíjense que lo que hicimos fue suponer que x raíz cúbica de la unidad podría resolver la ecuación (siendo raíz de ella y confirmando que el polinomio es divisible por x^2+x+1).

b) <u>Rel. de equivalencia</u>:

refleja: ¿$z_1 R z_1$? $\Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow |z_1|^2 \in \mathbb{R}$

Lo que es cierto pues $|z_1| \in \mathbb{R}$ y al cuadrado, sigue dentro de $\mathbb{R}$.

· Simétrica ¿$z_1 R z_2 \Rightarrow z_2 R z_1$?

$z_1 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R}$ (recordando que el conjugado se separa en el producto)

$\parallel$

$\overline{(\overline{z_1} \cdot z_2)} \in \mathbb{R}$, pero el conjugado de un real es él mismo.

$\Downarrow$

$\overline{z_1} \cdot z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow z_2 R z_1$.

· Transitiva ¿$z_1 R z_2$ y $z_2 R z_3 \Rightarrow z_1 R z_3$?

$z_1 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R}, \; z_2 \cdot \overline{z_3} \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot z_2 \cdot \overline{z_3} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_3} \cdot \underbrace{|z_2|^2}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_3}$ <u>debe</u> pertenecer a $\mathbb{R}$.

• $[z]_{\mathbb{R}} = \{a\cdot z \mid a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$

$z\cdot\bar{x} \in \mathbb{R}$ (x serán los amigos de z, los loquitos que al multiplicar se (siendo conjugado) con z se meten a los reales).

$$\Rightarrow z\cdot\bar{x} = r \in \mathbb{R}. \quad /\cdot\bar{z}$$

$$\Rightarrow |z|^2\cdot\bar{x} = r\cdot\bar{z}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{r\cdot\bar{z}}{|z|^2}$$ / conjugando a ambos lados.

$$\Rightarrow x = \frac{\bar{r}\cdot\bar{\bar{z}}}{|z|^2} = \frac{\bar{r}\cdot z}{|z|^2} \overset{\in\mathbb{R}}{=} \frac{r\cdot z}{|z|^2} = \underset{\substack{\uparrow \\ z.}}{z}\cdot\overbrace{\frac{r}{|z|^2}}^{\text{un loquito en } \mathbb{R}\setminus\{0\}}$$

Entonces, los loquitos que apañan son los que son de la forma $a\cdot z$, donde a es un real distinto de cero.

El Fin

Muchas gracias a todos !!