

P11

Pauta aux 14

Lo resolveremos encontrando explícitamente las soluciones y, luego, corroborando que sean raíces cúbicas de la unidad:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

Luego, elevamos al cubo directamente:

$$\begin{aligned} x_1^3 &= \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \left((-1)^3 + 3(-1)^2(\sqrt{3}i) + 3(-1)(\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3 \right) \\ &= \frac{1}{8} (-1 + 3\sqrt{3}i + 9 - 3\sqrt{3}i) \\ &= \frac{1}{8} \cdot 8 = 1 \quad \checkmark \quad \cup \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2^3 &= \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \left((-1)^3 + 3(-1)^2(-\sqrt{3}i) + 3(-1)(-\sqrt{3}i)^2 + (-\sqrt{3}i)^3 \right) \\ &= \frac{1}{8} (-1 - 3\sqrt{3}i + 9 + 3\sqrt{3}i) \\ &= \frac{1}{8} \cdot 8 = 1 \quad \cup \quad \text{Hallando lo pedido.} \end{aligned}$$

Como observación:

- Podrían haberse pasado a polares antes de elevar las posibles raíces al cubo.
- Podrían haber hecho un arreglín en la ecuación $x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$.

Viendo que los x que hacen que el segundo factor valiera cero son raíces de la unidad.

P2 a) Aquí, vale la pena recordar la propiedad de la suma geométrica:

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

($r \neq 1$).

Vamos a resolver el problema:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0.$$

Sabemos que podemos escribir las raíces de la unidad como sigue:

$$\omega^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \omega^n = e^{i2\pi j} \quad j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$\Leftrightarrow \omega = e^{i\frac{2\pi j}{n}}$$

(notar que si nos pasamos, es como tomar algún j en ese grupito y dar una vuelta completa. i.e. es como sumarle 2π a una raíz ya considerada)

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_j)^k = \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi j}{n}} \right)^k = \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi k}{n}} \right)^j$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{suma} \\ \text{geométrica}}}{=} \frac{\left(e^{i\frac{2\pi k}{n}} \right)^{n-1} - 1}{e^{i\frac{2\pi k}{n}} - 1} = \frac{\left(e^{i2\pi} - 1 \right)}{\left(e^{i\frac{2\pi k}{n}} - 1 \right)}$$

esto vale CERO.

esto... ¿puede valer cero?

NO.

porque sabemos que:

- $k \neq 0$
 - $\frac{k}{n} < 1$
- } por lo k que nos entregan.

O sea que no podemos formar el 1 (o cero) que necesitaríamos para que el denominador sea cero. Hallando lo pedido,

b) Ahora, usaremos lo anterior junto a esto.

(Un corolario interesante del problema anterior es que, si le quitamos el 1, la suma de las raíces del resto debe ser -1)

(• solo tenemos que quitar UN uno)

(• No guarda relación con la parte b, pero era interesante).

⇒ Empecemos:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} P(\omega_j)$$

$$= \frac{1}{n} [P(\omega_0) + P(\omega_1) + \dots + P(\omega_{n-1})]$$

$$= \frac{1}{n} \left(\begin{aligned} &[a_0 + a_1 \omega_0 + a_2 \omega_0^2 + \dots + a_{n-1} \omega_0^{n-1}] \\ &+ [a_0 + a_1 \omega_1 + a_2 \omega_1^2 + \dots + a_{n-1} \omega_1^{n-1}] \\ &+ \vdots \\ &+ [a_0 + a_1 \omega_{n-1} + a_2 \omega_{n-1}^2 + \dots + a_{n-1} \omega_{n-1}^{n-1}] \end{aligned} \right)$$

Factorizamos (inteligente por truco)

$$= \frac{1}{n} \left(\begin{aligned} &n \cdot a_0 \\ &+ a_1 (\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1}) \\ &+ a_2 (\omega_0^2 + \omega_1^2 + \dots + \omega_{n-1}^2) \\ &+ \vdots \\ &+ a_{n-1} (\omega_0^{n-1} + \omega_1^{n-1} + \dots + \omega_{n-1}^{n-1}) \end{aligned} \right)$$

Pero muchos de estos son cero!
(Por la parte a).

Quedando finalmente:

$$\frac{1}{n} \cdot (n \cdot a_0) = a_0, \text{ pero } P(0) = a_0 \text{ !!}$$

DemostRANDO lo pedido.

P3 Usaremos una propiedad

- * Si $p \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$ es raíz de p
 $\rightarrow \bar{z}$ tb es raíz de p .

Como queremos que $2+i$ sea raíz del polinomio

$$x^3 + ax^2 + bx + a = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Entonces su conjugado también será raíz.

- $2+i$ es raíz.
- $2-i$ es raíz.

Y como es un polinomio de grado 3, solo nos falta hallar una raíz.

(Cabe destacar que esta raíz debe ser real, puesto que si no lo fuera, su conjugado también sería raíz, pero no podemos tener más de tres raíces. Luego, debe ser real.)

Podemos escribir el polinomio como producto de $(x - \text{sus raíces})$.

$$\Rightarrow x^3 + ax^2 + bx + a = 0 = (x - (2+i))(x - (2-i)) \cdot (x - r)$$

r es la otra raíz.

$$= [(x-2)^2 + 1](x-r)$$

$$= [x^2 - 4x + 5](x-r)$$

$$= x^3 - rx^2 - 4x^2 + 4rx + 5x - 5r.$$

$$= x^3 + (-r-4)x^2 + (4r+5)x - 5r.$$

Tenemos entonces el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a = -r - 4 \\ b = 4r + 5 \\ a = -5r \end{cases}, \text{ resolviendo:}$$

$$a = -r - 4 = -5r \Rightarrow 4r = 4 \Rightarrow \boxed{r = 1}$$

Luego, hallamos a y b .

$$a = -5 \cdot 1 = -5$$

$$b = 4 \cdot 1 + 5 = 9.$$

Luego, el polinomio es:

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$$

Con raíces:

$$x = 2 + i$$

$$x = 2 - i$$

$$x = 1 //$$

P4 r es raíz de $p(x) \Leftrightarrow r-a$ es raíz de $p(x+a)$.

$$\Leftrightarrow p(r) = 0.$$

$$\Leftrightarrow p((r-a)+a) = 0$$

$$\Leftrightarrow r-a \text{ es raíz de } p(x+a).$$

La gracia de que el polinomio sea de grado mayor o igual a 1 es para no tener un polinomio constante.

P5 Veamos que no tienen raíces reales, pues $x^4 = -2$ es claramente una ecuación sin soluciones en los reales.

Haciendo el cambio de variable $u = x^2$.

$$\boxed{u^2 = -2}$$

Resolvemos $\boxed{u = \pm \sqrt{2}i}$

Luego tenemos $u_1 = \sqrt{2}i$ $u_2 = -\sqrt{2}i$.

Devolviéndonos a $u = x^2$

$$\Rightarrow x^2 = \sqrt{2}i, \quad x^2 = -\sqrt{2}i$$

Pasándonos a polares:

$$x^2 = \sqrt{2} e^{i\pi/2} \rightarrow i$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{2} e^{i\pi/4}$$

$$x^2 = \sqrt{2} e^{-i\pi/2} \rightarrow -i$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt[4]{2} e^{-i\pi/4}$$

Notemos que las cuatro raíces obtenidas son distintas, por lo que todas tienen multiplicidad 1.

$\Rightarrow$ Tenemos las cuatro raíces:

$$0 = (x - \sqrt[4]{2} e^{i\pi/4})(x + \sqrt[4]{2} e^{i\pi/4})(x - \sqrt[4]{2} e^{-i\pi/4})(x + \sqrt[4]{2} e^{-i\pi/4})$$

es la factorización en los complejos.

$$\text{y } \underline{x^4 + 2 = 0}$$

esta es la factorización en los reales.

(Hay más caminos para hacer esto)

P61

$$p(1) = 1^2$$

$$p(2) = 2^2$$

$$p(3) = 3^2$$

$$p(4) = 4^2$$

$$p(5) = 5^2$$

$$p(6) = 156$$

← Error en el enunciado, esto está bien.

Vamos a ocupar una propiedad:

"Dos polinomios que tienen grado n y comparten $n+1$ puntos son iguales."

Y nuestro candidato a solución será

$$q(x) = \underbrace{p(x) - x^2}_{\Rightarrow \text{gr}(q) = 5} = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

¿Por qué? ¡Conocemos 5 raíces de $q(x)$! Los números del 1 al 5 lo son. Falta confirmar que el 6 también corrobore la igualdad para ver que los polinomios son iguales.

$$q(6) = p(6) - 36.$$

(Nuestra intuición es que $q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$)

$$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 156 - 36 \quad \checkmark$$

(Lo anterior, pues 1, 2, 3, 4 y 5 son raíces de $q(x)$).

Entonces, vemos que efectivamente $q(x) = p(x) - x^2$

$$\text{Luego, } p(x) = q(x) + x^2 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + x^2$$

Encontrando el polinomio que queríamos.

Como acotaciones finales:

- Es intuitivo intentar armar un polinomio con $p(x) - x^2$ pues hallamos las 5 raíces de un polinomio de grado 5 (potencialmente hallándolos).
- Repasen división de polinomios.
- Repasen la forma de resolver ecuaciones de la forma $x^n = \text{número}$.
- Véanse unos exámenes pa cachar trucos.
- Pregunten todo lo que no entiendan.
- Den un último esfuerzo, ya no queda nada ☺.

Un abrazo chiquilines.

