Pauta 11

P1) notemos que desde 1998 hasta el 2018 hay 20 años, pasando por años bisiestos (2000, 2004, 2008, 2012, 2016)
Entonces, desde el nacimiento de Matías hasta el domingo de este año pasaron:

¡$365 \cdot 20 + 5$ días!

Veamos que los días son invariantes en módulo 7. En efecto, cada 7 días caemos en el mismo día de la semana.
Luego, (definiendo lunes como 1, Martes como 2, etc.) tenemos:

$$X + 365 \cdot 20 + 5 \equiv 0 \pmod 7$$

$$\Leftrightarrow X - \underset{(-21)\cdot 365 \equiv 0}{365} + 5 \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow X \equiv 360 \equiv 3 \pmod 7$$

Luego, Matías nació un miércoles.

P2 Busquemos donde se cae la asociatividad:

Es interesante que $a \star a = e$, además, $a \star b = e$, podemos jugar con eso:

$$(a \star a) \star b = e \star b = b$$

$$a \star (a \star b) = a \star e = a.$$

¡justamente! (el "inverso" era distinto para un mismo elemento, eso es bastante raro, concluimos viendo que efectivamente <u>no</u> es asociativa)

P3 a)

$\cdot_5$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

NO.

¡Tienen que aplicar módulo 5!

$\cdot_5$	1	2	3	4	0
1	1	2	3	4	0
2	2	4	1	3	0
3	3	1	4	2	0
4	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0

!! ☺

b) el 5 (o cero) no es invertible, luego, $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ no es grupo.

c) Si le quitamos el cero, cada elemento es invertible (es decir, $\forall x \exists y$ tq $x \cdot_5 y \equiv_5 1$) el neutro existe y es 1 y es fácil ver que conmuta, pues la matriz que se forma es simétrica, luego, es abeliano

P4)

$$(ab)^2 = a^2 b^2$$

$$\iff abab = a^2 b^2 \;/\; a^{-1}\cdot$$

$$bab = ab^2 \;/\; \cdot b^{-1}$$

$$ba = ab$$

Luego, G es abeliano

P5)

$$ab = ba$$

$$abb = bab$$

$$\boxed{aabb = abab}$$

veamos que $aabb = ee = e$.

pero además $abab = (ab)(ab) = e$.

Luego, por la pregunta anterior, el grupo ha de ser abeliano.

P6 a) $(G \times G, \Delta)$ es grupo:

- tiene neutro.
- asocia
- todos son invertibles

Neutro $\to$ $(a,b)\,\Delta\,(e_1,e_2) = (a,b)$

$$\Longleftrightarrow (a \star e_1, b \star e_2) = (a,b)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \star e_1 = a \\ b \star e_2 = b \end{pmatrix} \quad e_1 \text{ y } e_2 \text{ deben ser } e$$

Veamos por la izq.

$$(e,e)\,\Delta\,(a,b) = (e \star a, e \star b) = (a,b)$$

efectivamente tiene neutro (e,e)

Asocia: $\big((a,b)\,\Delta\,(c,d)\big)\,\Delta\,(g,h)$

$$= \big((a \star c, b \star d)\,\Delta\,(g,h)\big)$$

$$= \big((a \star c) \star g, (b \star d) \star h\big)$$

$$= \big(a \star (c \star g), b \star (d \star h)\big)$$

$$= (a,b)\,\Delta\,(c \star g, d \star h) = (a,b)\,\Delta\,\big((c,d)\,\Delta\,(g,h)\big) \;//$$

invertibles:

$(a,b) \Delta (i_1, i_2) = (e,e)$

$\Leftrightarrow (a \star i_1, b \star i_2) = (e,e)$

$\begin{cases} a \star i_1 = e \\ b \star i_2 = e \end{cases} \Rightarrow$ i_1, i_2 deben ser los inversos según $\star$ (que existen pues $G, \star$ es grupo).

$(i_1, i_2) \Delta (a,b)$

$= (i_1 \star a, i_2 \star b) = (e,e)$.

Luego, $(G \times G, \Delta)$ es grupo.

b) $\phi : G \times G \to G$

$\phi((a,b)) \to (a \star b)^{-1}$

pdq: $\phi((a,b) \Delta (c,d))$

$= \phi((a,b)) \star \phi((c,d))$.

por la definición que nos da el enunciado de Δ:

$$\phi((a,b)\Delta(c,d)) = \phi((a*c, b*d))$$

$$\underset{\text{def. de } \phi}{=} [(a*c)*(b*d)]^{-1} = (b*d)^{-1} * (a*c)^{-1}$$

$$= (d^{-1} * b^{-1}) * (c^{-1} * a^{-1})$$

asocia

$$= (d^{-1} * (b^{-1} * c^{-1}) * a^{-1})$$

conmuta (abeliano)

$$= (d^{-1} * (c^{-1} * b^{-1}) * a^{-1})$$

asocia.

$$= (d^{-1} * c^{-1}) * (b^{-1} * a^{-1})$$

def

$$= (c*d)^{-1} * (a*b)^{-1}$$

conmuta (abeliano)

$$= (a*b)^{-1} * (c*d)^{-1}$$

def

$$= \phi((a,b)) * \phi((c,d))$$

P6)

c) ¿Es ϕ isomorfismo? Veamos

$$\phi((x,y)) = \phi((a,b))$$

$$\iff (x * y)^{-1} = (a * b)^{-1}$$

$$\iff y^{-1} * x^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \;/\; * a$$

$$a * y^{-1} * x^{-1} = b^{-1} \;/\; b$$

$$a * b * x^{-1} * y^{-1} = e \;/\; * x$$

$$a * b * y^{-1} = x \;/\; * y$$

$$a * b = x * y.$$

Veamos que si elegimos $a \neq b$, basta tomar $\phi(a, a^{-1}) = \phi(b, b^{-1}) = \phi(e^{-1}) = e$ En ambos casos. Luego, ϕ no es isomorf.