MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 10: Estructuras Algebraicas

5 de agosto de 2018

P1.- Sea $(S, \star)$ una e.a. con neutro e y $\star$ una operación asociativa. Para a fijo, invertible para $\star$ y con inverso a^{-1} en S se define la operación Δ en S como:

$$\forall x, y \in S,\ x\Delta y = x \star a \star y$$

a) Demuestre que la ley Δ es asociativa y tiene neutro (encuéntrelo!)
Dem: Lo que debemos hacer para demostrar esto es ver que: $(x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z)$

$$(x\Delta y)\Delta z$$
$$= (x \star a \star y)\Delta z$$
$$= (x \star a \star y) \star a \star z$$

Como $\star$ asocia, tenemos lo siguiente:

$$= x \star (a \star y \star a) \star z$$
$$= x \star a \star (y \star a \star z)$$
$$= x\Delta(y \star a \star z)$$
$$= x\Delta(y\Delta z)$$

Que era justamente lo que queríamos demostrar, corroborando que la ley Δ es asociativa. Falta entonces hallar el neutro (al que llamaremos y) para la operación Δ.

$$x\Delta y = x$$
$$x \star a \star y = x$$

De aquí, vemos que es necesario que $a \star y$ sea justamente el neutro para la operación $\star$. Entonces, tenemos la siguiente igualdad:

$$a \star y = e$$
$$a^{-1} \star a \star y = a^{-1} \star e$$
$$y = a^{-1}$$

Vemos entonces que el neutro (y) para la operación $\star$ es a^{-1}. (Queda demostrar que si operamos el neutro por el otro lado también obtenemos como resultado x, esto queda propuesto para ustedes!)

b) Caracterice elementos invertibles según Δ y calcule el inverso de a respecto a Δ.
Dem: Lo que haremos en este item es intentar "despejar" el inverso de x según Δ (Lo llamaremos i). De aquí, tendremos lo siguiente:

$$x\Delta i = a^{-1}$$

(Recordemos que a^{-1} es el neutro de Δ)

$$x \star a \star i = a^{-1}$$

Fijémonos que aquí va a ser necesario que x sea invertible según $\star$ (lo llamaremos x^{-1}), dado que vamos a tener que despejar i. Si suponemos x invertible según $\star$ tenemos:

$$x^{-1} \star x \star a \star i = x^{-1} \star a^{-1}$$
$$a \star i = x^{-1} \star a^{-1}$$
$$a^{-1} \star a \star i = a^{-1} \star x^{-1} \star a^{-1}$$
$$i = a^{-1} \star x^{-1} \star a^{-1}$$

Queriendo decir que el inverso de x según Δ es $a^{-1} \star x^{-1} \star a^{-1}$ (donde x^{-1} es el inverso de x según $\star$).
Esto quiere decir que para que i exista, x^{-1} debe existir. (Esa será la caracterización, para que x sea invertible según Δ, será necesario que sea invertible según $\star$).
Calculemos finalmente el inverso de a respecto a Δ. (Veamos que es invertible según Δ dado que es invertible según $\star$)

$$a\Delta i_a = a^{-1}$$

Pero ya conocemos como obtener el inverso según Δ, $(a^{-1} \star x^{-1} \star a^{-1})$, recordando que el inverso de a según $\star$ es a^{-1}. Luego, el inverso según Δ será $a^{-1} \star a^{-1} \star a^{-1}$.

P2.- Se define en $\mathbb{R}^2$ la *l.c.i.* $\heartsuit$ por:

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b)\heartsuit(c,d) = (ac, bc+d)$$

a) Estudie la conmutatividad de $\heartsuit$
Hay que ver si $(a,b)\heartsuit(c,d) = (c,d)\heartsuit(a,b)$

$$(a,b)\heartsuit(c,d)$$
$$= (ac, bc+d)$$

Por otro lado, veamos lo que pasa con el lado derecho:

$$(c,d)\heartsuit(a,b)$$
$$=(ca, da+b)$$

Claramente, las primeras coordenadas son iguales. Sin embargo, las segundas no lo son :(. Por lo tanto, $\heartsuit$ no es conmutativa en $\mathbb{R}^2$.

b) Estudie la asociatividad de $\heartsuit$
Necesitamos lo siguiente: $(a,b)\heartsuit((c,d)\heartsuit(e,f)) = ((a,b)\heartsuit(c,d))\heartsuit(e,f)$ Viendo el lado izquierdo, tendremos lo siguiente:

$$(a,b)\heartsuit((c,d)\heartsuit(e,f))$$
$$= (a,b)\heartsuit(ce, de+f)$$
$$= (ace, bce+de+f)$$

Si miramos el lado derecho ahora, tenemos:

$$((a,b)\heartsuit(c,d))\heartsuit(e,f)$$
$$= (ac, bc+d)\heartsuit(e,f)$$
$$= (ace, (bc+d)\cdot e+f)$$
$$= (ace, bce+de+f)$$

Como ambos lados son iguales, tenemos que la operación $\heartsuit$ es asociativa.

c) Determine el neutro de $\heartsuit$
Trabajaremos la expresión:$(a,b)\heartsuit(e_1,e_2) = (a,b)$

$$(a,b)\heartsuit(e_1,e_2) = (a,b)$$
$$(a\cdot e_1, b\cdot e_1 + e_2) = (a,b)$$

Tenemos entonces el siguiente sistema de ecuaciones:$\begin{cases} a\cdot e_1 = a \\ b\cdot e_1 + e_2 = b \end{cases}$

Tenemos directo que e_1 es 1. Luego, reemplazando, tenemos que e_2 es 0. El neutro entonces será el par $(1,0)$. (Corroboren que si operan con el neutro por el otro lado, también se tiene la igualdad)

d) Encuentre que elementos son invertibles según $\heartsuit$
Hallemos los elementos que nos permiten completar la ecuación $(a,b)\heartsuit(i_1,i_2) = (1,0)$

$$(a,b)\heartsuit(i_1,i_2) = (1,0) = (a\cdot i_1, b\cdot i_1 + i_2) = (1,0)$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a\cdot i_1 = 1 \\ b\cdot i_1 + i_2 = 0 \end{cases}$$

Mirando la primera ecuación, llegamos a que $i_1 = \dfrac{1}{a}$. Por lo cual una condición para que el inverso exista es que $a \neq 0$. Mirando la segunda ecuación, tenemos que $i_2 = -b\cdot i_1$, veamos que solo es necesario que i_1 exista, y esa condición ya la tenemos dado que fijamos $a \neq 0$. Luego, los elementos invertibles serán aquellos que tengan primera coordenada distinta de 0.

e) Determine elementos idempotentes para $\heartsuit$

Para esto, necesitamos que se satisfaga la siguiente ecuación: $(a,b)\heartsuit(a,b) = (a,b)$

$$(a,b)\heartsuit(a,b) = (a,b)$$
$$(a^2, ab+b) = (a,b)$$
$$\begin{cases} a^2 = a \\ ab + b = b \end{cases} \quad \text{Se puede dar } a = 1 \text{ o } a = 0.$$

Si $a = 1$, la segunda ecuación queda $b + b = b$, lo que implica que $b = 0$. Por lo que $(1,0)$ es idempotente.

Si $a = 0$, la segunda ecuación queda $b = b$, pero eso se tiene siempre! Lo que quiere decir que todo elemento de la forma $(0,b)$ es idempotente :)

P3.- Sea $(G, \blacklozenge)$ una estructura en la que $\blacklozenge$ es una *l.c.i.* asociativa, conmutativa e idempotente.

Se define en G la relación $\mathcal{R}$ por $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\blacklozenge y = y$. Demuestre que $\forall a,b \in G$ se cumple:

a) $a\mathcal{R}(a\blacklozenge b)$ y $b\mathcal{R}(a\blacklozenge b)$

Trabajando sobre la definición, tenemos lo siguiente:

$$a\mathcal{R}(a\blacklozenge b)$$
$$\Leftrightarrow a\blacklozenge(a\blacklozenge b) = a\blacklozenge b$$

Como $\blacklozenge$ asocia y es idempotente, concluimos el resultado. $a\blacklozenge(a\blacklozenge b)$
$$= (a\blacklozenge a)\blacklozenge b$$
$$= a\blacklozenge b$$

El otro caso es exactamente igual, pero deben agregar el hecho de que $\blacklozenge$ es conmutativa! (Propuestits)

b) Si $\exists x \in G$ tal que $x\mathcal{R}a \wedge x\mathcal{R}b$ entonces $xR(a\blacklozenge b)$ (Son ambas condiciones necesarias?)

Veamos que si existe tal x, tenemos que $x\blacklozenge a = a$ y que $x\blacklozenge b = b$, fijémonos que para que se tenga $x\mathcal{R}(a\blacklozenge b)$ es necesario que $x\blacklozenge(a\blacklozenge b) = (a\blacklozenge b)$

Esto quiere decir que $(x\blacklozenge a)\blacklozenge b = (a\blacklozenge b)$

Pero como $x\mathcal{R}a$, la igualdad de arriba se tiene!

Es de fácil corroboración que no son necesarias ambas condiciones. (De hecho, solo usamos una)

P4.- Sea f un homomorfismo, no necesariamente epiyectivo, de $(A, \oslash)$ en $(B, \Diamond)$, con neutros e_A y e_B, respectivamente. Demuestre:

a) $e_B = f(e_A)$

Dem: $f(x) = f(x \oslash e_A) = f(x)\Diamond f(e_A)$.

$f(x) = f(e_A \oslash x) = f(e_A)\Diamond f(x)$

Como esto se tiene, $f(e_A)$ es neutro para B, es decir, $f(e_A) = e_B$.

b) Si $a \in A$ tiene inverso b para $(A, \oslash)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para $(B, \Diamond)$

Dem: $e_B = f(e_A) = f(a \oslash b) = f(a)\Diamond f(b)$

Del mismo modo, trabajando la ecuación al revés, tenemos:

$e_B = f(e_A) = f(b \oslash a) = f(b)\Diamond f(a)$

Entonces si b es inverso de a, entonces $f(b)$ es inverso para $f(a)$.

c) Supongamos que todos los elementos son invertibles. Demuestre que un homomorfismo $f : A \to B$ de $(A, \oslash)$ en $(B, \Diamond)$ es un monomorfismo, si y solo si $f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\}$

Dem: Lo desarrollaremos por doble implicancia!

$\Rightarrow$ Si f es monomorfismo (es un homomorfismo inyectivo), supongamos que hubiera otra preimagen de e_B (llamémosle x).

Entonces, tendremos que $f(e_A) = f(x)$. Sin embargo, como f es inyectiva, $e_A = x$, luego, $f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\}$

$\Leftarrow$ Si $f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\}$ entonces, veamos que pasa si $f(x) = f(y)$.

Como todos los elementos son invertibles, operaremos con $f(x^{-1})$ por la derecha a ambos lados.

$f(x)\Diamond f(x^{-1}) = f(y)\Diamond f(x^{-1})$

$f(x \oslash x^{-1}) = f(y)\Diamond f(x^{-1})$

$f(e_A) = f(y) \Diamond f(x^{-1})$
$e_B = f(y \oslash x^{-1})$
Analizando la preimagen, vemos que:
$e_A = y \oslash x^{-1}$
Ahora, realizando el proceso por la izquierda, llegaremos a la siguiente ecuación:
$e_A = x^{-1} \oslash y$
Lo que nos dice que y es inverso según $\oslash$ para x^{-1}. Pero el inverso es único para las $l.c.i$, luego, $x = y$. Por consiguiente, f es monomorfismo. Se concluye entonces la equivalencia buscada.

Como acotación final, puedo decirles que este tipo de problemas en general son muy estructurados, cosas como la P2 son aquellas que deben saber hacer muy bien. La P4 es una pregunta que si bien es difícil, logra tocar temas interesantes, como la preimagen y la forma de estudiarla (lean bien eso en particular, si tienen dudas, pregunten).

Eso, saben que estoy más que dispuesto a ayudarles siempre :) Felices vacaciones! (Se viene la Pauta 9)