MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 9: Cardinalidad y Newton

22 de julio de 2018

P1.- *a)* Demuestre que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

Basta con multiplicar por unos convenientes (TRUCAZO), llevando esto a forma de binomio de Newton. Multiplicaremos por $1^{n-k}1^k$, quedando:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = (1+1)^n = 2^n$$

b) Relacione esto con la cantidad de subconjuntos en un conjunto de cardinal igual a n.
Pensemos en que esto es justamente la cantidad de conjuntos que podemos armar con $0, 1, 2, \ldots, n$ elementos desde uno de n elementos. Vean que esto es justamente la forma de construir el conjunto potencia!. Luego, tiene sentido que el resultado de esa suma exactamente el mismo que el del cardinal del conjunto potencia.

c) Concluya que si $|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
Por el argumento expuesto anteriormente, vemos que el cardinal del conjunto potencia es justamente 2^n

P2.- Calcule las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{j=2}^{n+1}\binom{k}{2}\binom{j}{j-2}$

Primero, sacaremos el término $\binom{k}{2}$ de la suma de más adentro, pues es una constante para la misma. Quedando lo siguiente:

$$\sum_{k=2}^{n+1}\binom{k}{2}\sum_{j=2}^{n+1}\binom{k}{2}\binom{j}{j-2}$$

Aquí, usaremos un truquito. Cambiaremos $\binom{k}{2}$ por $\binom{k}{k-2}$ para usar cambio de índice y que nos quede algo muy bonito.

$$\sum_{k=2}^{n+1}\binom{k}{k-2}\sum_{j=2}^{n+1}\binom{j}{j-2}$$

Aplicamos cambio de índice.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+2}{k}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{j+2}{j}$$

Resolvemos los combinatorios

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+2)(k+1)}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(j+2)(j+1)}{2}$$

Lo único que nos queda por hacer es resolver la suma que queda dentro:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^2+3k+2\right)\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}j^2+3j+2\right)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^2+3k+2\right)\frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+3\frac{(n-1)n}{2}+2n\right)$$

Queda resolver y nos va a entregar exactamente el mismo resultado que el de la suma anterior

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+3\frac{(n-1)n}{2}+2n\right)\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+3\frac{(n-1)n}{2}+2n\right)$$

(La siguiente estaba mal escrita, después de un exhaustivo proceso de intentar resolverla por unos días lo descubrí. Lo siento :(, aquí en la pauta viene bien escrita)

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{4n-2k}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}\binom{4n-2k}{j}$

Para resolver esta sumatoria (que tiene pura pinta de Binomio de Newton) buscaremos los distintos requisitos para resolverla. Esos son:

a) Que la suma comience desde cero.

b) Que el término combinatorio tenga en la parte superior el índice superior de la sumatoria (y que el inferior sea el índice de la sumatoria)

c) Que dentro de la sumatoria tengamos algo de la forma $x^k y^{n-k}$ (Si nos falta algo, le agregamos un 1, dejando inalterado todo, pero cómodo para usar binomio de Newton)

Entonces, comenzaremos moviendo todo lo que no dependa de j fuera de la sumatoria!

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{4n-2k}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}\binom{4n-2k}{j}\\ &=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}\sum_{j=0}^{4n-2k}\binom{4n-2k}{j}\end{aligned}$$

Analizamos entonces la sumatoria de índice j (la más interna)

$$\sum_{j=0}^{4n-2k}\binom{4n-2k}{j}$$

Esa suma cumple las condiciones a y b para usar el binomio de Newton. Sin embargo, falta ver el término $x^k y^{n-k}$ Para hacer esto, multiplicaremos por $1^k\cdot 1^{n-k}$, quedando:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{4n-2k}\binom{4n-2k}{j}\\ &=\sum_{j=0}^{4n-2k}\binom{4n-2k}{j}1^k 1^{n-k}\\ &=(1+1)^{4n-2k}\\ &=2^{4n-2k}\end{aligned}$$

Entonces, nuestra suma original toma la siguiente forma:

$$=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}2^{4n-2k}$$

Tenemos las condiciones a y b (es fácil corroborar que el combinatorio que tenemos nos sirve! dado que $\binom{2n}{2n-k}=\binom{2n}{k}$) Luego, solo falta hallar $x^k y^{n-k}$ (que en este caso será $x^k y^{2n-k}$) Notemos que ya tenemos algo útil (2^{4n-2k}), ya que eso es igual a $2^{2(2n-k)}=4^{2n-k}$. Luego, nuestra suma queda:

$$= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} 4^{2n-k}$$

voilà, tenemos justo lo que nos faltaba al ladito izquierdo (ese $(-1)^k$ oculto). Tenemos entonces un binomio de Newton!

$$= (4-1)^{2n} = 3^{2n} = 9^n$$

P3.- Demuestre que $|A \times B| = |B \times A|$ (Note que A y B no son necesariamente finitos)
Un camino es hallar una biyección entre $A \times B$ y $B \times A$. Definiremos entonces la función:

$$\begin{cases} f: & A \times B \to B \times A \\ & (a,b) \to (b,a) \end{cases}$$

Es fácil verificar que es biyectiva (queda propuesto). De modo que al existir una biyección entre ambos conjuntos, tienen el mismo cardinal.

P4.- *a*) Demuestre que el conjunto de los triángulos que se forman con vértices en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable.
Sea $S = \{((a,b),(c,d),(e,f)) | (a,b),(c,d),(e,f)$ forman un triángulo y $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\}$
Veamos que necesariamente, el conjunto de los triángulos que se forman con vértices en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es subconjunto de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (eso es porque para un triángulo se necesitan tres puntos, cuyas coordenadas están en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$). Dicho esto, es claro que **como mucho**, el conjunto buscado tiene cardinal numerable. $S \subseteq \mathbb{Q}^6$, como $\mathbb{Q}^6$ es producto finito de numerables, es numerable. En virtud del Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, $|S| \leq |\mathbb{Q}^6| = |\mathbb{N}|$.
Fijemos dos puntos. Sea C tal que $\forall (a,b,c) \in C \ a = (1,0), b = (0,0) \ y \ c = (x,1) \ x \in \mathbb{Q}$, luego, veamos que todos los puntos de la forma (a,b,c) forman un triángulo. Veamos que este conjunto es numerable, pues podemos hacer una biyección con los racionales (que son numerables) con la función $f \begin{cases} C \to \mathbb{Q} \\ ((1,0),(0,0),(x,1)) \to x \end{cases}$. Es fácil verificar que es una biyección. Pero el conjunto C es un subconjunto de S. Por lo que $|\mathbb{N}| = |C| \leq |S|$ Luego, como el cardinal de S es (mayor o igual) y (menor o igual) que el de los naturales, es numerable. (Por Teo. de Cantor-Berstein-Schröder)
(En este item usé hartas funciones que me permitieron armar igualdades de cardinal que sabía manejar. No es necesario que usen EXACTAMENTE LAS MISMAS, pero es importante que usen funciones que sean útiles, es decir, que ver que son biyectivas sea fácil y que además nos ayude a igualar cardinales a nuestra conveniencia)

b) Demuestre que el conjunto de las rectas que intersectan a la abscisa y ordenada en términos racionales es un conjunto numerable.

Veamos que podemos hacer una biyección entre estas rectas y $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2$. Veamos que, dado el enunciado, cada recta está definida por dos puntos en $\mathbb{Q}$ (en otras palabras, dados dos puntos, existe una y solo una recta que pasa por esos dos puntos). Es así que podemos crear una biyección desde el conjunto de las rectas a un par de puntos con coordenada racional. Esto es:

$$\begin{cases} f: & \text{conjunto de rectas que cortan los ejes en racionales } \to (\{0\} \times \mathbb{Q}) \times (\mathbb{Q} \times \{0\}) \\ & \dfrac{0 - y_0}{x_0 - 0}(x - x_0) = y - y_0 \to ((0,y_0),(x_0,0)) \end{cases}$$

Esta función es biyectiva, lo corroboraremos.
<u>Inyectividad:</u>
Supongamos que $((0,y_1),(x_1,0)) = ((0,y_2),(x_2,0))$, esto sucede sí y solo sí son iguales coordenada a coordenada, es decir, $y_1 = y_2$ y $x_1 = x_2$. Siendo ese el caso, las rectas en cuestión son las mismas. Esto es, la función es inyectiva.
<u>Epiyectividad:</u>
Tomemos cualquier par de puntos en $(\{0\} \times \mathbb{Q}) \times (\mathbb{Q} \times \{0\})$, $((0,y_0),(x_0,0))$. Definimos la recta que pasa por esos puntos, la cual es $\dfrac{-y_0}{x_0}(x - x_0) = y - y_0$. Vemos que pertenece al conjunto de rectas que cortan ambos ejes en un

racional (que justamente es nuestro dominio :o). Luego, la función es epiyectiva.
De aquí se concluye que es una biyección, pero $|\mathbb{Q}| = |\{0\} \times \mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$. Luego,
$|$Rectas que cortan a los ejes en coordenada racional$| = |\mathbb{N}| \times |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, es decir, es numerable.

P5.- El objetivo de este problema es hallar el cardinal de las funciones epiyectivas que van desde conjuntos con n elementos en conjuntos de $n-1$ elementos.

a) Calcule la cantidad de funciones epiyectivas:

1) Que van desde conjuntos de 2 elementos en conjuntos de un elemento.
Dem: Se darán cuenta de que hay una única forma para hacer esto.

2) Que van desde conjuntos de 3 elementos en conjuntos de dos elementos.
Dem: Esta ya no es tan fácil. Pero pueden obtener sin demasiado trabajo que hay 6 funciones que hacen esto.

b) Intentar hallar una formula para funciones de conjuntos con n elementos en conjuntos de $n-1$ elementos. Esto se va complicando, pero podemos ver que -dado que es epiyectiva- a todos los elementos del codominio les llegará una flechita. Quedando una flechita sin asignar, la cual le corresponderá a alguno. Es decir, habrán n-2 elementos con 1 flechita (o preimagen) y habrá uno especial que tiene 2 flechitas (o preimagenes). O sea que (al menos para las preimágenes) el problema se reduce a elegir cual es el elemento que tiene dos preimágenes. Hay $n-1$ opciones! Luego, falta ver de cuántas formas podemos elegir las dos preimágenes que le llegarán al elemento en particular que elegimos previamente. Es decir, de cuántas formas podemos elegir dos elementos del dominio? Esto lo hacemos a través del número combinatorio $\binom{n}{2}$. Es decir, que las $n-1$ opciones que teníamos, tendremos que multiplicarlas por $\binom{n}{2}$. Quedan los otros $n-2$ elementos del dominio sueltos, junto a los $n-2$ elementos del codominio sueltos. Para ellos debemos construir una biyección! (si le asignamos más de una preimagen a algún elemento del codominio la función no podrá ser epiyectiva y a cada preimagen hay que asignarle como mínimo una imagen, pues este objeto es una función). En el primer caso, tenemos $n-2$ lugares a los cuales llegar. Luego, tenemos $n-3$ (pues uno ya fue elegido), luego $(n-4)$ y así sucesivamente hasta llegar a 1. Concluyendo que la cantidad de biyecciones posibles de estructurar entre los dos subconjuntos de $n-2$ elementos son $(n-2)!$ funciones. Es decir, intuitivamente, el cardinal que buscamos es $(n-1) \cdot \binom{n}{2} \cdot (n-2)! = \dfrac{(n-1) \cdot n!}{2}$ (esto se obtiene de trabajar el término combinatorio.

c) Demuestre la fórmula por inducción.
OH MY GOD (le he dado muchas vueltas a una demostración por inducción y aún no logro encontrar una que dé el resultado. De momento les dejo la promesa de una demostración por inducción. Sin embargo, (ahora sí) se cacha que el resultado es correcto :))

P6.- Calcule el cardinal del conjunto de las sucesiones con valores en un conjunto finito con al menos dos elementos. Para ello, haga lo siguiente:

a) Piense en las *4-tuplas* con valores sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. (Una *4-tupla* es un cuarteto ordenado, es decir, $\{(a_1, a_2, a_3, a_4) | a_i \in A \text{ para } i = \{1, 2, 3, 4\}\}$)
Bueno, en cada una de las posiciones tenemos la posibilidad de elegir cualquiera de los tres elementos de nuestro conjunto. Como tenemos cuatro elecciones que realizar, tendremos $3^4 = 81$ opciones disponibles (ojo con la idea de cantidad de elementos en nuestro conjunto y la cantidad de elecciones a realizar.)

b) Ahora, intente extender (intuitivamente) la idea obtenida en el caso anterior para una sucesión (recuerde que las sucesiones son *numerables*)
Como las sucesiones son numerables, tendremos que realizar una cantidad numerable de elecciones! Notemos que el conjunto tiene dos o más elementos y que tendremos como opción la cardinalidad del conjunto :o, es decir:

$$\underbrace{|A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot \ldots \cdot |A|}_{\text{Cantidad numerable de veces}} = |A|^{|\mathbb{N}|} = \text{Cantidad de elecciones totales}$$

Fijémonos que $|A|^{|\mathbb{N}|} \geq 2^{|\mathbb{N}|}$, pero $2^{|\mathbb{N}|}$ es cardinal no numerable (estudien eso, es un dato sabido). Luego, al ser mayor o igual que un cardinal no numerable, el conjunto en cuestión también será no numerable! :) (piensen que es un súper infinito, pero tienen otro que tiene más elementos que él, luego, tb será un súper infinito)

Eso chicos, si tienen dudas sobre cualquier cualquier cosa me avisan (porfa :c) Saludos inviernales!