MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 9: Cardinalidad y Newton

10 de julio de 2018

- **Conjunto finito:** Diremos que un conjunto A es ***finito*** cuando exista un $n \in \mathbb{N}$ tal que haya una función $f : A \to \{1, 2, 3, \dots, n\}$, biyectiva.

  Por ejemplo, el conjunto $C = \{4, 5, 7\}$ es finito. Pues existe n (en particular, sabemos que es 3) podemos crear una biyección $f : C \to \{1, 2, 3\}$ definiendola así $f(4) = 1, f(5) = 2, f(7) = 3$, luego, vemos que C es finito.

- **Cardinal finito:** Sea A un conjunto finito. El único $n \in \mathbb{N}$ para el que existe una enumeración $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ de A se denomina ***cardinal*** de A y se denota $|A|$.
  (Siguiendo el ejemplo anterior, vemos entonces que el cardinal de C es 3)

- **Prop:** $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$

- **Prop:** Si B es un conjunto finito y $A \subseteq B$, entonces A también es finito y, además, $|A| \leq |B|$

- **Prop:** Si A es un conjunto infinito y $A \subseteq B$, entonces B es infinito.

- **Prop:** Si A y B son conjuntos finitos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  (En particular si son disjuntos $|A \cup B| = |A| + |B|$)

- **Prop:** Si $B \subseteq A$ y A es finito, entonces $|A \setminus B| = |A| - |B|$. En particular $|B| \leq |A|$ y, si $|A| = |B|$ entonces, $A = B$.

- **Prop:** Sean A y B conjuntos (no necesariamente finitos). Se cumple que:
  - $|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ inyectiva.
  - $|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ biyectiva.
  - $|A| \geq |B| \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ epiyectiva

- **Prop:** Si los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ son disjuntos de a pares, entonces

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

- **Prop:** Sean A y B conjuntos finitos, entonces $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

- **Conjunto de funciones:** Definimos el conjunto de TODAS las funciones de A en B por:

$$B^A := \{f : A \to B |\ f \text{ es función}\}$$

- **Prop:** Para A y B conjuntos finitos se tiene que el cardinal de B^A es $|B|^{|A|}$

- **Prop:** El cardinal del conjunto potencia de A es $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

- **Coeficiente Binomial:** $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, a veces lo entienden como "la cantidad de subconjuntos de k elementos desde uno de n elementos"

- **Prop: [Binomio de Newton]**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

- **Prop:**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- **Prop:**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Prop:** Un conjunto A *numerable* es un conjunto infinito tal que $|A| = |\mathbb{N}|$

- **Prop:** Union numerable de numerables es numerable

- **Prop:** Producto finito de numerables es numerable

- **Prop:** A es infinito $\Leftrightarrow |A| \geq |\mathbb{N}|$

- **Prop:** $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ son numerables

P1.- *a*) Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

b) Relacione esto con la cantidad de subconjuntos en un conjunto de cardinal igual a n.

c) Concluya que si $|A|=n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)|=2^n$.

P2.- Calcule las siguientes sumas:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{j=2}^{n+1}\binom{k}{2}\binom{j}{j-2}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{4n+2k}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}\binom{4n-2k}{j}$

P3.- Demuestre que $|A\times B|=|B\times A|$ (Note que A y B no son necesariamente finitos)

P4.- *a*) Demuestre que el conjunto de los triángulos que se forman con vértices en $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ es numerable.

b) Demuestre que el conjunto de las rectas que intersectan a la abscisa y ordenada en términos racionales es un conjunto numerable.

P5.- El objetivo de este problema es hallar el cardinal de las funciones epiyectivas que van desde conjuntos con n elementos en conjuntos de $n-1$ elementos.

a) Calcule la cantidad de funciones epiyectivas:

1) Que van desde conjuntos de 2 elementos en conjuntos de un elemento.
2) Que van desde conjuntos de 3 elementos en conjuntos de dos elementos.

b) Intentar hallar una formula para funciones de conjuntos con n elementos en conjuntos de $n-1$ elementos.

c) Demuestre la fórmula por inducción.

P6.- Calcule el cardinal del conjunto de las sucesiones con valores en un conjunto finito con al menos dos elementos. Para ello, haga lo siguiente:

a) Piense en las *4-tuplas* con valores sobre el conjunto $A=\{1,2,3\}$. (Una *4-tupla* es un cuarteto ordenado, es decir, $\{(a_1,a_2,a_3,a_4)|a_i\in A$ para $i=\{1,2,3,4\}\}$)

b) Ahora, intente extender (intuitivamente) la idea obtenida en el caso anterior para una sucesión (recuerde que las sucesiones son *numerables*)

Cuadro ayuda para numerabilidad

	$\cup$ **Finita**	$\cup$ **Num.**	$\cap$ **Finita**	$\cap$ **Num.**	$\times$ **Finito**	$\times$ **Num.**
Finito	Finito	Depende	Finito	Finito	Finito	Depende
Numerable	Num.	Num.	Depende	Depende	Num.	No Num.
No Num.	No Num.	No Num.	No Num.	No Num.	No Num.	No Num.