

Pauta Aux 8

P1 a) $\sum_{k=3}^{n-1} (k-2)(k+1)$ ← Para este problema, vamos a tener que separar y usar sumas conocidas (de k^2 y k), nos conviene que partan de 0 o 1, vamos a hacer cambio de índice!

$= \sum_{k=3-2}^{n-1-2} [(k+2)-2][(k+2)+1]$

$= \sum_{k=1}^{n-3} k(k+3) = \sum_{k=1}^{n-3} k^2 + 3k = \sum_{k=1}^{n-3} k^2 + \sum_{k=1}^{n-3} 3k$

$= \sum_{k=1}^{n-3} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{n-3} k = \frac{(n-3)(n-3+1)(2(n-3)+1)}{6} + \frac{(n-3)(n-3+1)}{2}$

* Ojo con los índices superiores! por fórmula generalmente van a ver que las sumas llegan hasta n . Esto no siempre es así. Cuidado con eso.

b) $\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}+1} (2i-1) = \sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}+1} 2i + \sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}+1} -1$

$= 2 \sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}+1} i - \sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}+1} 1$

Aquí, podríamos usar cambio de índice. Sin embargo, vamos a usar otro truco.

$$\sum_{i=1}^n = \sum_{i=1}^m + \sum_{i=m+1}^n \Rightarrow \sum_{i=m+1}^n = \sum_{i=1}^n - \sum_{i=1}^m$$

(es decir, transformamos una suma que parte donde sea en dos sumas que parten desde 1, algo que sí sabemos calcular.)

$$= 2 \left(\sum_{i=1}^{\frac{m(m+1)}{2}+1} i - \sum_{i=1}^{\frac{m(m-1)}{2}} i \right) - \sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}+1} 1$$

$$= 2 \left(\frac{\left[\frac{m(m+1)}{2} + 1 \right] \left[\frac{m(m+1)}{2} + 2 \right]}{2} - \frac{\left[\frac{m(m-1)}{2} \right] \left[\frac{m(m-1)}{2} + 1 \right]}{2} \right) - \left[\left(\frac{m(m+1)}{2} + 1 \right) - \left(\frac{m(m-1)}{2} + 1 \right) + 1 \right]$$

(Lo simplifican uds. !!)

P1 c) $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

$$= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \left[\ln(k+1) - \ln(k) \right]$$

suce
antec

tienen signo distinto $\Rightarrow$ aplicamos suma telescópica!

$$= \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} = \ln(n+1)$$

d) $\sum_{k=3}^n b_k - b_{k-3}$ $\leftarrow$ Si nos fijamos, nos damos cuenta de que es como una telescópica, pero rara. Lo que podremos hacer es construir muchas telescópicas.

$$= \sum_{k=3}^n b_k - \underbrace{(b_{k-1} - b_{k-1})}_{\text{suma cero}} - \underbrace{(b_{k-2} - b_{k-2})}_{\text{suma cero}} - b_{k-3}$$

$$= \sum_{k=3}^n \underbrace{b_k}_{\text{suc}} - \underbrace{b_{k-1}}_{\text{antec}} + \sum_{k=3}^n \underbrace{b_{k-1}}_{\text{suc}} - \underbrace{b_{k-2}}_{\text{antec}} + \sum_{k=3}^n \underbrace{b_{k-2}}_{\text{suc}} - \underbrace{b_{k-3}}_{\text{antec}}$$

$$= b_n - \underbrace{b_{3-1}}_{b_2} + b_{n-1} - \underbrace{b_{3-2}}_{b_1} + b_{n-2} - \underbrace{b_{3-3}}_{b_0}$$

e) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}(k+1) + k\sqrt{k+1}}$ ← Sospechamos que es una telescópica camuflada (muchos k y $k+1$ en fracciones)
¡Desracionalizamos!

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}(k+1) - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)^2 - k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}(k+1) - k\sqrt{k+1}}{\cancel{k^3} + 2k^2 + k - \cancel{k^3} - \cancel{k^2}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}(k+1) - k\sqrt{k+1}}{k^2 + k} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}(k+1) - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}$$

→ Podemos usar fracciones parciales o separar directamente, aquí, separaré directamente.

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}(\cancel{k+1})}{k(\cancel{k+1})} - \frac{\cancel{k}\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\sqrt{k}}{k}}_{\text{anterior}} - \underbrace{\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}}_{\text{siguiente}}$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

f) Los factoriales también vuelen a telescópica.

$$\sum_{k=0}^n k k! = \sum_{k=0}^n (k+1-1) k! \quad \text{trucazo}$$

$$= \sum_{k=0}^n \underbrace{(k+1)}_{(k+1)!} k! - k! = \sum_{k=0}^n \underbrace{(k+1)!}_{\text{suc.}} - \underbrace{k!}_{\text{antec.}}$$

$$= (n+1)! - 0! = (n+1)! - 1 //$$

es una constante.

g) $\sum_{k=1}^n \frac{n k 2^k}{(k+2)!} = n \sum_{k=1}^n \frac{k 2^k}{(k+2)!}$ telescópica

La crearemos, forzando el numerador.

$$\text{trucazo} \quad = n \sum_{k=1}^n \frac{(k+2-2) 2^k}{(k+2)!} = n \sum_{k=1}^n \frac{(k+2) 2^k}{(k+2)!} - \frac{2 \cdot 2^k}{(k+2)!}$$

$$= n \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{2^k}{(k+1)!}}_{\text{antec.}} - \underbrace{\frac{2^{k+1}}{(k+2)!}}_{\text{suc.}} = \frac{2}{2!} - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

$$= 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

P2 fijémonos que son muchas fracciones y todas tienen 1 en el numerador.

$\left(\sum \frac{1}{\text{algo.}} \right)$, ahora, ese algo va de $(n+1)(n)$

hasta $(2n-1)2n$. Y van consecutivamente.

Pondremos entonces k y $k+1$.

$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right)$ falta definir los índices

en el primero, $n=k$ (pues es $\frac{1}{n(n+1)}$) y

el último es $(2n-1)$, pues es $\frac{1}{(2n-1)(2n-1+1)}$.

Luego, la suma es:

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

fracciones con k y $k+1$
huele a telescópica $\hookrightarrow$

Ahora, utilizaremos el método de frac. parciales.

$\frac{1}{k(k+1)}$ tenemos que tener productos en el denominador, y procede así.

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1) + Bk}{k(k+1)}$$

$$= \frac{Ak + Bk + A}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k + A}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{0k + 1}{(k+1)k} = \frac{(A+B)k + A}{(k+1)k} \Rightarrow \begin{matrix} A = 1 \\ A+B = 0 \end{matrix}$$

Vemos que $A = 1$ y $B = -1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

anterior *sucesor*

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n-1+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{2-1}{2n} = \frac{1}{2n} //$$

P3 $S_n = \sum_{k=1}^n k r^k$

a) Nos fijamos que hay una suma que parte en cero y llega a $n-1$. Además, nos indican usar cambio de índice. Lo hacemos.

$$S_n = \sum_{k=1-1}^{n-1} (k+1) r^{k+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k r^{k+1}}_{\text{esto debe ser } r(S_n - nr^n)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}}_{\text{hallamos una parte !!}}$$

Vemos que se parece MUCHO a S_n , pero con el índice corrido. Lo que haremos para hacer aparecer el nr^n es sumarlo y restarlo.

$$= r \left[\sum_{k=0}^{n-1} k r^k + \underbrace{(nr^n - nr^n)}_{\text{sumar 0}} \right] + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

sale, pues r es una constante

Ahora, es CRUCIAL que vean que cuando $n=k$, $kr^k = nr^n$, o sea, es el término enésimo de la sumatoria (también pueden verlo como $nr^n = \sum_{k=n}^n k r^k$)

Uniéndolo a la otra sumatoria tenemos:

$$= r \cdot \left[\sum_{k=0}^n k r^k - n r^n \right] + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

Eso es MUY IGUAL a S_n , pero parte desde cero. Entonces, lo separaremos de la suma

$$= r \cdot \left[\cancel{\sum_{k=0}^0 k r^k} + \sum_{k=1}^n k r^k - n r^n \right] + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

S_n

nos fijamos que el término evaluado en cero da 0. ($0 \cdot r^0 = 0$), luego, eso es igual a:

$$= r \cdot [S_n - n r^n] + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

b) Aquí, basta despejar S_n .

$$S_n = r \cdot [S_n - n r^n] + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow S_n - r S_n = -n r^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow S_n (1 - r) = -n r^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

$$S_n = \frac{-nr^{n+1}}{(1-r)} + \frac{\sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}}{(1-r)} \leftarrow \begin{array}{l} \text{falta} \\ \text{calcular } \textcircled{*} \\ \text{eso} \end{array}$$

$$\textcircled{*} \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} = r \cdot \sum_{k=0}^{n-1} r^k \stackrel{\text{por suma geométrica}}{=} r \cdot \frac{r^{n-1+1} - 1}{r - 1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{-nr^{n+1}}{(1-r)} + r \cdot \frac{1 - r^n}{(1-r)^2}$$

$$= \frac{-nr^{n+1}(1-r) + r - r^{n+1}}{(1-r)^2}$$

$$= \frac{-nr^{n+1} + nr^{n+2} + r - r^{n+1}}{(1-r)^2}$$

$$= \frac{-(1+n)r^{n+1} + nr^{n+2} + r}{(1-r)^2}$$

P4 Primero, demostramos la desigualdad de la izquierda.

pdf: $1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n}$

(caso base $n=0$).

$$\Rightarrow 1 + \frac{0}{2} \leq \sum_{k=1}^{2^0=1} \frac{1}{k} = 1 \quad \checkmark \checkmark$$

Como $1 \leq 1$, demostramos el caso base.

H.I. se cumple hasta cierto n .

P.I. veamos si se cumple para $n+1$.

$$1 + \frac{n+1}{2} \leq H_{2^{n+1}} \quad \left(\text{H.I. } 1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \right)$$

entonces, lo que queremos ver es si

$$\frac{1}{2} \leq H_{2^{n+1}} - H_{2^n}$$

$$= \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$$

Fijémonos en lo siguiente:
 cada uno de los términos de la suma
 es mayor que el más chico de ellos
 (es decir, el último, pues su denominador
 es el más grande). O sea:

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} 1$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (2^{n+1} - 2^n \cdot 1 + 1) = \frac{(2 \cdot 2^n - 2^n + 0)}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{2^n + \cancel{1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{\cancel{1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}$$

Quedando demostrado el paso inductivo
 Concluyendo la demostración.

Ahora, resolveremos la de la derecha:

$$n=0;$$

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1 \geq 1 + 0 //$$

Lo suponemos válido hasta n , veamos $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \leq 1 + n + 1. \quad / \text{ Por H.I.}$$

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \leq 1 + n.$$

Queda ver que:

$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \leq 1$, veamos que todos los términos de la suma son más pequeños que el primero (de denominador MENOR) Luego:

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^n+1} = \frac{1}{2^n+1} (2^{n+1} - 2^n - 1 + 1) = \frac{2^n}{2^n+1} \leq 1 //$$

Conduciendo la p4 //

P5 | Notar que la parte superior va desde 1 al denominador y que el denominador va de 1 a n.
o sea:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^i k}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{\cancel{i} \cancel{(i+1)}}{\cancel{i} 2} = \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^n i/2 + \sum_{i=1}^n 1/2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 1$$

por fórmula

$$= \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} (n-1+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} //$$