P1

Pauta Aux 7

Matías Arócar Carvajal

a) "x es amigo de y"
↳ en Facebook.

- Refleja: ¿x es amigo de x en Facebook? No.
  → Uno no puede ser amigo de uno mismo en Facebook
- Simétrica: ¿x es amigo en FB de y ⇒ y es amigo en FB de x?
  → Sí, ya que no puedo ser amigo de alguien sin que sea amigo mío.
- Antisimétrica? No (Es fácil verlo, porque además la relación no es refleja)
- Transitiva? No.

b) "x es descendiente de y" (Es admisible ser descendiente de uno mismo)
Propuesto: Pruebe que es de orden

c) "x llegó en la misma posición o antes que y en una carrera"
Propuesto: Pruebe que es de orden
** Vea que es un orden total (esto no es trivial).
(en el dominio de las personas que participan en la carrera).

P2) a) Si queremos ver que algo es una relación de equivalencia, tenemos que verificar 3 condiciones.

- Refleja: ¿xRx?

$mRn \iff (m=n) \vee \{2|n \wedge 2|m\}$

$xRx \iff \underbrace{(x=x)} \vee \{2|x \wedge 2|x\}$

Esto es Verdadero.

$xRx \iff V \vee \{2|x \wedge 2|x\}$

$\iff V.$

R es refleja.

- Simétrica: ¿$xRy \Rightarrow yRx$?

$xRy \iff (x=y) \vee \{2|n \wedge 2|m\}$

$\iff (y=x) \vee \{2|m \wedge 2|n\}$

$\iff yRx$

* ¡Muchas gracias a la alumna a la que se le ocurrió esta solución!

R es simétrica.

- Transitiva: ¿$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$?

(Resolveremos que esto pasa de forma distinta al aux)

$xRy \wedge yRz$

$\iff \left[(x=y) \vee (2|x \wedge 2|y)\right] \wedge \left[(y=z) \vee (2|y \wedge 2|z)\right]$

$\iff \left[\left[(x=y) \vee (2|x \wedge 2|y)\right] \wedge (y=z)\right] \vee \left[\left[(x=y) \vee (2|x \wedge 2|y)\right] \wedge (2|y \wedge 2|z)\right]$

$\iff \left(((x=y) \wedge (y=z)) \vee ((2|x) \wedge (2|y) \wedge y=z\right) \vee \left[(x=y) \wedge (2|y \wedge 2|z)\right] \vee \left[(2|x \wedge 2|y) \wedge 2|y \wedge 2|z\right]$

$\Rightarrow ((x=z) \vee ((2|x) \wedge (2|z))) \vee (2|x \wedge 2|z) \vee (2|x \wedge 2|z)$

$\Rightarrow (2|x \wedge 2|z) \vee x=z \iff xRz$ (esto es usar solo lógica).

R es transitiva $\therefore$ R es de equivalencia !!

P2) a) 2) Veamos casos pequeños para notar qué pasa.

¿Con quién está relacionado 0?

$0 R x \iff \underbrace{0 = x}_{\substack{x=0 \\ \text{nos sirve}}} \vee (\underbrace{2|0}_{\substack{\text{esto es} \\ \text{cierto}}} \wedge \underbrace{2|x}_{\substack{\text{¿cuándo} \\ \text{pasa esto?} \\ \text{¡}x\text{ par!}}})$

$\Rightarrow$ 0 está relacionado con todos los pares en $\mathbb{N}$

¿Con quién está relacionado 1?

$1 R x \iff \underline{1 = x} \vee (\underline{2|1} \wedge 2|x)$

$x = 1$ nos sirve.

esto es falso.

Luego, esto tb es falso.

$\Rightarrow$ 1 está relacionado con el 1.

Ejercicio: Miren que pasa con el 2 y el 3.

Ahora, la intuición será que todos los pares están relacionados entre ellos (usan al 0 como puente) y los impares solo están relacionados consigo mismos.

i.e. $A/R = \{ [0]_R, [1]_R, [3]_R, \ldots [2k+1]_R, \ldots \}$

clase de los pares (entre corchetes ponemos a alguien que esté en el conjunto)

cada una de las clases de equivalencia de los impares.

probémoslo:

$2k \; R \; p \quad (k, p \in \mathbb{N})$ [con quién se relacionan los pares?]

$\Leftrightarrow \underbrace{2k = p}$ $\vee$ $(\underbrace{2 \mid 2k}_{V} \wedge \underbrace{2 \mid p})$

si se cumple esto, $p = 2k$, es decir es par. (en particular, es justamente $2k$)

si esto es verdad, p puede ser escrito como $2q$ ($q \in \mathbb{N}$), por lo tanto p es par.

$\therefore$ Los pares se relacionan con todos lo pares.

$(2k+1) \; R \; x \quad (k, x \in \mathbb{N})$ [Con quién se relacionan los impares]

$\Leftrightarrow \underbrace{2k+1 = x}$ $\vee$ $(\underbrace{2 \mid 2k+1} \wedge 2 \mid x)$

$x = 2k+1$ nos sirve

esto es falso, por lo que no nos interesa esta condición.

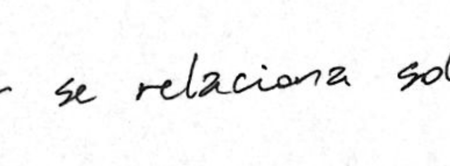
$\therefore$ Un impar se relaciona solo consigo mismo.

Luego, las clases de equivalencia son las que creíamos.

$[0]_R \leftarrow$ la de todos los pares

$[1]_R, [3]_R, \ldots \leftarrow$ una por cada impar (donde solo está él mismo).

(gráficamente)



b) Para que la relación sea de <u>orden</u> tenemos que satisfacer 3 condiciones.

- Ω es refleja?

$x \Omega y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$

$x \Omega x \Leftrightarrow f(x) \leq f(x)$, esto es cierto, pues son iguales.

- Ω es antisimétrica?

$\underbrace{x \Omega y \wedge y \Omega x} \Rightarrow x = y$?

$\Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(x) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$\uparrow$

esto pasa pues la función es <u>inyectiva</u>

- Ω es transitiva?

$\underbrace{x \Omega y \wedge y \Omega z} \Rightarrow x \Omega z$?

$\Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(z) \Rightarrow f(x) \leq f(z) \Leftrightarrow x \Omega z$.

Luego, como se satisfacen esas 3 condiciones, la relación Ω es de orden.

P3| Tenemos que cumplir 3 propiedades:

• $\sim_v$ es refleja? $x \sim_v x \iff \underbrace{x \sim_1 x}_{\text{V, pues } \sim_1 \text{ es de equivalencia}} \vee \underbrace{x \sim_2 x}_{\text{V, pues } \sim_2 \text{ es de equivalencia.}}$

$\sim_v$ es refleja !!.

• $\sim_v$ es simétrica? $x \sim_v y \Rightarrow y \sim_v x$.

$\iff (\underbrace{x \sim_1 y}_{i} \vee \underbrace{x \sim_2 y}_{ii}) \Rightarrow (y \sim_1 x \vee y \sim_2 x)$

· Si i es Verdadero y ii Falso, tenemos que como $\sim_1$ es de equiv. entonces $x \sim_1 y \Rightarrow y \sim_1 x$.
Luego, se cumple el lado derecho.

· Si i es falso y ii es verdadero, tenemos (análogamente) que como $\sim_2$ es de equivalencia $\Rightarrow y \sim_2 x$.
Luego, se cumple el lado derecho.

· Si i y ii son verdaderas, concluimos con cualquiera de las dos formas anteriores.

· Si ambas son falsas, $F \Rightarrow$ cualquier cosa es verdadero.

• $\sim_v$ es transitiva? Acá se cae el asunto, veamos porqué.

$x \sim_v y \wedge y \sim_v z \Rightarrow x \sim_v z$? <u>NO</u>

demostración <u>intuitiva</u>: $x \sim_1 y \iff V$ $\quad y \sim_1 z \iff F$

$x \sim_2 y \iff F$ $\quad y \sim_2 z \iff V$

(Al ojo, es falso). $\quad x \sim_v y \iff V$ $\quad y \sim_v z \iff V$

pero no necesariamente $x \sim_v z$ es verdadera.

Tomemos las relaciones de equivalencia más intuitivas ¡el módulo!

* Prueben con algunos números. No es que se me ocurriera de la nada.

$\sim_1 : \equiv_5 \quad \sim_2 : \equiv_7$

y tomemos x, y, z convenientes: (3, 8 y 15)

$3 \equiv 8 \pmod 5 \quad 8 \equiv 15 \pmod 7$

o sea $3 \sim_1 8 \Leftrightarrow V$ y $8 \sim_2 15 \Leftrightarrow V$

sin embargo:

$(3 \not\equiv_7 8) \quad 3 \sim_2 8 \Leftrightarrow F \quad \wedge \; 8 \sim_1 15 \Leftrightarrow F. \quad (15 \not\equiv_5 8)$

Luego: $3 \sim_v 8 \Leftrightarrow V \;\wedge\; 8 \sim_v 15 \Leftrightarrow V$

pero $3 \sim_v 15 \Leftrightarrow \underbrace{3 \sim_1 15}_{F} \vee \underbrace{3 \sim_2 15}_{F} \quad \underbrace{(V \wedge V \Rightarrow F)}_{\text{FALSO}}$

es falso.

Por contraejemplo, la proposición es <u>falsa</u>.

*Propuesto: ¿$x \sim_u y \Leftrightarrow x \sim_1 y \wedge x \sim_2 y$ es rel. de equivalencia?

P4

a) $\Rightarrow$] $fRg \Leftrightarrow \exists n \geq 0, \forall k \in \{0,1,\dots,n\}: f(k) Q g(k)$
dado n, $0 \leq n$, luego, como $0 \in \{0,\dots,n\}: f(0) Q g(0)$

$\Leftarrow$] Si $f(0) Q g(0) \Rightarrow$ existe un n, 0.
(es decir $\exists n \geq 0, \forall k \in \{0\}: f(k) Q g(k)$)
por lo tanto: fRg.

b) Aquí, usaremos una función muy útil:

$$f_a(x): \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto a$$ es decir, es una función constante, que vale $a \in \mathbb{R}$.

Si R es relación de orden, tenemos que es refleja: i.e. fRf $\forall f \in A$ (el conjunto de funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$).

Veamos que Q es relación de orden:

• Refleja: $a Q a$?, aquí usaremos que podemos escribir a en una forma DEMASIADO CONVENIENTE
$a = f_a(0)$
o sea $a Q a \Leftrightarrow f_a(0) Q f_a(0) \overset{\text{por parte a)}}{\Leftrightarrow} f_a R f_a$
pero como R es de orden (en particular, refleja)
Q es refleja.

b) Antisimétrica: $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

$a Q b \wedge b Q a \Rightarrow a = b$

por a)

$\Leftrightarrow f_a(0) \, Q \, f_b(0) \wedge f_b(0) \, Q \, f_a(0)$

$\Leftrightarrow f_a R f_b \wedge f_b R f_a \Rightarrow f_a = f_b$

por ser R rel. de orden

ya que $f_a = f_b$, $f_a(0) = f_b(0) \Leftrightarrow a = b$.

Luego, Q es antisimétrica.

c) Transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$a Q b \wedge b Q c \Rightarrow a Q c$.

$\Leftrightarrow f_a(0) \, Q \, f_b(0) \wedge f_b(0) \, Q \, f_c(0)$

$\Leftrightarrow f_a R f_b \wedge f_b R f_c \Rightarrow f_a R f_c \Leftrightarrow f_a(0) \, Q \, f_c(0)$

por ser R rel. de orden

$\Leftrightarrow a Q c$.

Luego, Q es transitiva.

$\therefore$ Q es de orden (si R lo es).

P5)

Veamos que R^* es de orden:

· R^* es refleja? pdq:

$$(a,b)\,R^*\,(a,b) \iff \underbrace{(\underbrace{a\neq a}_{F} \wedge \underbrace{aRa}_{V}) \vee (\underbrace{a=a}_{V} \wedge \underbrace{bRb}_{V})}_{V}$$

Luego es refleja
(R es de orden, ¡atentos con eso!)

· R^* es antisimétrica? pdq:

$$(a,b)R^*(c,d) \wedge (c,d)R^*(a,b) \Rightarrow (a,b)=(c,d)$$

$$\iff [(a\neq c \wedge aRc) \vee (a=c \wedge bRd)] \wedge [(c\neq a \wedge cRa) \vee (c=a \wedge dRb)]$$

$$\iff [(a\neq c \wedge aRc)\wedge(c\neq a \wedge cRa)] \vee \underbrace{[(a\neq c \wedge aRc)\wedge(c=a \wedge dRb)]}_{\text{FALSO}}$$

$$\vee \underbrace{[(a=c \wedge bRd)\wedge(c\neq a \wedge cRa)]}_{\text{FALSO}} \vee [(a=c \wedge bRd)\wedge(c=a \wedge dRb)]$$

$$\iff [(a\neq c \wedge aRc \wedge c\neq a \wedge cRa)] \vee [(a=c \wedge (bRd \wedge dRb))]$$

$$\iff [a\neq c \wedge (aRc \wedge cRa)] \vee [a=c \wedge b=d]$$

$$\Rightarrow [\underbrace{a\neq c \wedge a=c}_{\text{FALSO}}] \vee [a=c \wedge b=d]$$

$$\iff a=c \wedge b=d \iff (a,c)=(b,d)$$

Luego, R^* es antisimétrica.

R^* es transitiva.

$$(a,b)\,R^*\,(c,d) \wedge (c,d)\,R^*\,(e,f) \Rightarrow (a,b)\,R^*\,(e,f)$$

$$\Leftrightarrow \Big[\overbrace{(a\neq c \wedge aRc)}^{i} \vee \overbrace{(a=c \wedge bRd)}^{ii}\Big] \wedge \Big[\overbrace{(c\neq e \wedge cRe)}^{iii} \vee \overbrace{(c=e \wedge dRf)}^{iv}\Big]$$

Analicemos los distintos casos

• i y iii:

$a\neq c \wedge aRc \wedge c\neq e \wedge cRe \Rightarrow aRe$. (pero no estamos seguros de $a\neq e$)
falta ver que $a\neq e$. Supongamos que $a=e$

$\Rightarrow \underbrace{eRc}_{\Leftrightarrow aRc} \wedge cRe \Rightarrow e=c$, esto contradice la hipótesis.

Luego, $a\neq e$. Tenemos entonces $(a,b)\,R^*\,(e,f)$.

• ii y iii:

$a=c \wedge bRd \wedge c\neq e \wedge cRe$.

$\Rightarrow a\neq e$, y como cRe y $a=c$, tenemos aRe. $(a\neq e \wedge aRe)$ ✓

luego $(a,b)\,R^*\,(e,f)$

• i y iv:

$a\neq c \wedge aRc \wedge c=e \wedge dRf$:

$\Rightarrow a\neq e$ y $(aRc$ y $c=e) \Rightarrow aRe$, luego, $(a,b)\,R^*\,(e,f)$.

• ii y iv:

$a=c \wedge bRd \wedge c=e \wedge dRf$

$\Rightarrow a=e \wedge bRd \wedge dRf \Rightarrow bRf \wedge a=e$, luego $(a,b)\,R^*\,(e,f)$.

Desde cualquier otro caso con lado izquierdo verdadero podemos hacerlo implicar alguno de los casos vistos arriba corroborando transitividad $\therefore R^*$ es de Orden